Roger Penrose, *Shadows of the Mind. A Search for the Missing Science of Consciousness*.

Synthese en bedenkingen (in de voetnoten)

Deel 5

Het vijfde hoofdstuk handelt over de struktuur van de quantum-wereld, en start met het schetsen van enkele puzzels en paradoxen uit de quantumtheorie. Volgens Penrose volgen die paradoxen uit de onvolledigheid van de quantum-theorie. De volgende problemen worden besproken: het ‘Elitzur-Vaidman bomb-testing problem’, het ‘magische twaalfvlak’, en de mysteries die verband houden met het Einstein-Podolsky-Rosen-experiment.

De grondslag voor de quantum-theorie wordt reeds gelegd door Cardano (1501-1576) met diens waarschijnlijkheidsrekening en zijn notie van het complex getal (dit is een getal van de vorm $a + ib$, waarbij $i = \sqrt{-1}$, waarbij *a* en *b* reëele getallen zijn), ontwikkeld met het oog op het oplossen van de kubische vergelijking - die twee of zelfs drie oplossingen kan hebben (want meerdere snijpunten op de grafische voorstelling):
$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$
Door een substitutie van de vorm $x \to x + a$, verkrijgen we:
$x^3 = px + q$ (waarbij *p* en *q* reëele getallen zijn).
De twee oplossingen zijn deze: $y = x^3$ en $y = px + q$.
Zoeken we twee getallen die als som het getal 10 geven en als product het getal 40, dan krijgen we ook hier twee oplossingen:
$5 + \sqrt{-15}$, en $5 - \sqrt{-15}$.
Zowel het waarschijnlijkheidsrekenen als de complexe getallen zijn belangrijk voor de quantumtheorie.

Onderscheiden we eerst (kunstmatig) het niveau van de klassieke fysica en dat van de quantumfysica. Welke rol spelen nu de waarschijnlijkheidsrekening en de complexe getallen in de quantumfysica? In de klassieke fysica kan een elektron gesitueerd zijn in *A* of in *B*. In de quantumfysica heeft zo'n elektron een bepaalde plaats, maar in de toekomst heeft het verschillende mogelijke plaatsen *tegelijk*. Dit wordt als volgt genoteerd: $w|A\rangle + z|B\rangle$, waarbij *w* en *z* complexe getallen zijn. Stel nu eens dat *w* en *z* reële getallen waren geweest, was de kans dat het electron zich in *A* situeert ($\frac{w}{w+z}$) tot de kans dat het electron zich in *B* situeert ($\frac{z}{w+z}$) gelijk aan de verhouding: $\frac{w}{z}$. Als dus *w* = 0, dan zit het electron zeker in *B*, en als *z* = 0, dan zit het electron zeker in *A*. Als *w* en *z* beide gelijk zijn aan 1, dan is de kans dat het electron zich in *A* bevindt even groot als de kans dat het zich in *B* bevindt: *w* = *z* = 1.

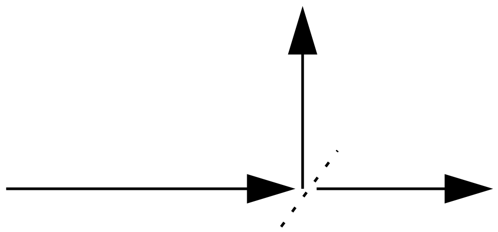
Maar, zoals we gezegd hebben, zijn deze interpretaties slechts geldig op voorwaarde dat *w* en *z reële* getallen zijn. En we weten nu dat *w* en *z* geen reële, maar *complexe* getallen zijn! Hier worden dus geen waarschijnlijkheden uitgedrukt, maar preciesheden: de beschrijving van de quantumwereld is (- alle vooroordelen ten spijt -) wiskundig precies én volledig deterministisch!

Deze deterministische beschrijving wordt genoemd: de *unitary evolution U*. *U* wordt beschreven middels exacte wiskundige vergelijkingen, meer bepaald de *vergelijking van Schrödinger* die aanduidt hoe de quantumtoestand, of de golffunctie, ψ of $|\psi\rangle$, verandert in de loop van de tijd, en die quantumtoestand drukt uit wat de volledige som is (inbegrepen de factoren die complexe getallen bevatten) van alle mogelijkheden van het systeem. Vragen we ons dus af of een elektron zich in *A* of in *B* bevindt, dan geeft de vergelijking van Schrödinger ons het volgende antwoord: $|\psi\rangle = w|A\rangle + z|B\rangle$, waarbij *w* en *z* complexe getallen zijn (verschillend van 0). En we noemen die uitdrukking de *lineaire suppositie* van de twee toestanden $|A\rangle$ en $|B\rangle$. De kwantiteit van $|\psi\rangle$ (ofwel $|A\rangle$ ofwel $|B\rangle$) wordt ook vaak de *toestandsvector* genoemd. Meer algemene kwantumtoestanden (of: toestandsvectoren) kunnen er als volgt uitzien: $|\psi\rangle = u|A\rangle + v|B\rangle + w|C\rangle + \ldots + z|F\rangle$, waarbij *u, v, w, ...,* en *z* complexe getallen zijn, en $|A\rangle, |B\rangle, \ldots, |F\rangle$ duiden verschillende mogelijke plaatsen aan waar het deeltje in kwestie zich kan bevinden. Die termen kunnen bijvoorbeeld ook, i.p.v. de plaats van het deeltje, de toestand van zijn spin aanduiden. Ook kan het aantal termen oneindig zijn, maar dat wordt hier buiten beschouwing gelaten. Verder moet ook nog vermeld worden dat enkel de *verhoudingen* van de complex belaste factoren van belang zijn. Een toestandsvector vermenigvuldigd met een complexe factor ($u|\psi\rangle$) representeert dezelfde *fysische* toestand als ($|\psi\rangle$) zelf. Dus alleen de verhouding *w:z* heeft betekenis, niet *w* of *z* afzonderlijk.

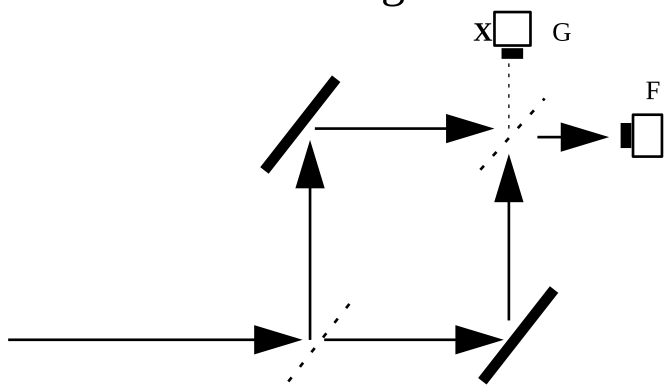
Nu is de Schrödinger vergelijking *U, lineair*, dit wil zeggen: als we twee toestanden hebben, $|\psi\rangle$ en $|\phi\rangle$, en na een periode δt evolueren elk van deze toestanden naar de nieuwe toestanden, $|\psi'\rangle$ en $|\phi'\rangle$, dan zal de corresponderende superpositie $w|\psi\rangle + z|\phi\rangle$ evolueren naar $w|\psi'\rangle + z|\phi'\rangle$. Schrijfwijze: $als\,|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle, en\,|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle, dan: w|\psi\rangle + z|\phi\rangle \mapsto w|\psi'\rangle + z|\phi'\rangle$. Dit betekent: elke aldus beschreven ‘wereld’ evolueert onafhankelijk, volgens steeds dezelfde deterministische Schröder-vergelijking, en de particuliere lineaire superpositie die de volledige toestand beschrijft, laat gedurende deze evolutie de waarde van de complexe getallen onaangetast. Het is echter niet zo dat de superpositie en de waarde van de complexe getallen geen fysische rol zouden spelen. Een voorbeeld om hun belang aan te tonen, is het volgende:

Licht schijnt op een half-verzilverde, half-doorlaatbare spiegel die de helft van het licht doorlaat en de andere helft weerkaatst (in stippellijn). Het is echter niet zo dat de helft van de fotonen nu weerkaatst en de andere helft doorgelaten worden, want *élk foton afzonderlijk* verkeert m.b.t. zijn doorgang of zijn weerkaatst worden in superpositie! Zo zal een foton die eerst in toestand $|A\rangle$

was, volgens *U* evolueren naar een toestand van superpositie, namelijk: $|B\rangle + i|C\rangle$, waarbij de eerste term duidt op de toestand waarin de foton terecht komt als hij door de spiegel heen gaat, en de tweede term duidt op zijn toestand als hij weerkaatst wordt. Wat er met het foton gebeurt, noteren we als volgt: $|A\rangle \rightarrow |B\rangle + i|C\rangle$.



De factor *'i'* treedt hier op in gevolge de zeef met gaten zo groot als een vierde deel van een golflengte. We moeten hier, in de quantumtheorie, nu veronderstellen dat het foton in deze superpositie de *beide dingen tegelijk* doet. Om aan te tonen dat dit niets te maken heeft met klassieke waarschijnlijkheid, zullen we nu eens proberen om de twee bundels fotonen samen te brengen middels een volledig reflecterende spiegel (in vetjes).



Volgens *U* zouden dan $|B\rangle$ en $|C\rangle$ als volgt evolueren: $|B\rangle \rightarrow i|D\rangle$ en $|C\rangle \rightarrow i|E\rangle$. Vandaar zal de totale toestand als volgt evolueren:

$$|B\rangle + i|C\rangle \rightarrow i|D\rangle + i(i|E\rangle)$$
$$= i|D\rangle - |E\rangle$$

(want $i^2 = -1$). Stel nu nog een vierde halfverzilverde spiegel, dan zullen, volgens *U*, $|D\rangle$ en $|E\rangle$ als volgt evolueren:
$|D\rangle \rightarrow |G\rangle + i|F\rangle$ en $|E\rangle \rightarrow |F\rangle + i|G\rangle$. Dus:

$$i|D\rangle - |E\rangle \rightarrow i(|G\rangle + i|F\rangle) - (|F\rangle + i|G\rangle)$$
$$= i|G\rangle - |F\rangle - |F\rangle - i|G\rangle$$
$$= -2|F\rangle$$

We zien dus dat de mogelijkheid $|G\rangle$ voor het foton uitgesloten is. De beide bundels samen geven slechts de ene mogelijkheid $|F\rangle$. Dit komt doordat beide bundels zich *tegelijk* actualiseren in de fysische toestand van het foton gedurende zijn traject tussen de eerste en de laatste spiegel. We zeggen dat de eerste en de tweede bundel onderling *interfereren*. Die twee alternatieve ‘werelden’ van het foton bestaan dus eigenlijk niet gescheiden: ze kunnen elkaar beïnvloeden via het interferentieverschijnsel. Het gaat hier om een eigenschap van enkelvoudige fotonen. Elk foton voelt a.h.w. de beide mogelijke routes waarmee het a.h.w. *co-existeert*, maar het blijft één foton.

Willen we nu weten of een foton overgaat in toestand $|F\rangle$ of in toestand $|G\rangle$, dan zal zo’n meetproces veroorzaken dat de quantumgebeurtenissen ‘vergroot’ worden naar het klassieke niveau. Op het quantumniveau echter, persisteren de lineaire superposities. Nemen we ze (op klassiek niveau) waar als *actuele* gebeurtenissen, dan zal hetzij $|F\rangle$ hetzij $|G\rangle$ fotonen registreren. De quantumtoestand lijkt dan op een mysterieuze wijze overgesprongen te zijn van een toestand van superpositie ($w|F\rangle + z|G\rangle$) naar een toestand met ofwel alleen maar $|F\rangle$ ofwel alleen maar $|G\rangle$. Dat heet de ‘toestandsvectorreductie’, het ‘ineenklappen van de golffunctie’ of de ‘quantumsprong’. En dit is een reëel fysisch proces.

Hoe berekenen we nu de kans dat een meting van een superpositietoestand een bepaalde uitkomst heeft? Dat doen we volgens de volgende regel. Bekijken we onze laatste grafiek. Bij een meting, die beslist of ofwel toestand $|F\rangle$ ofwel toestand $|G\rangle$ zich actualiseert, en die gebruik maakt van de detectoren F en G, welke te maken krijgen met de superpositie $w|F\rangle + z|G\rangle$, is de kans dat de waarneming in F dezelfde waarschijnlijkheidsgraad heeft als die in G, gelijk aan: $\frac{|w|^2}{|z|^2}$, waarbij deze factoren de vierkante moduli zijn van de complexe getallen *w* en z. (N.B.: de vierkante modulus van een complex getal is gelijk aan de som van de kwadraten van zijn reële en imaginaire delen, zo bijvoorbeeld is de vierkante modulus van z = x + iy gelijk aan: $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(y + ix) = z\bar{z}$ (waarbij $\bar{z} = x - iy$ de *complexe toegevoegde van z* wordt genoemd, en hetzelfde geldt voor *w*).

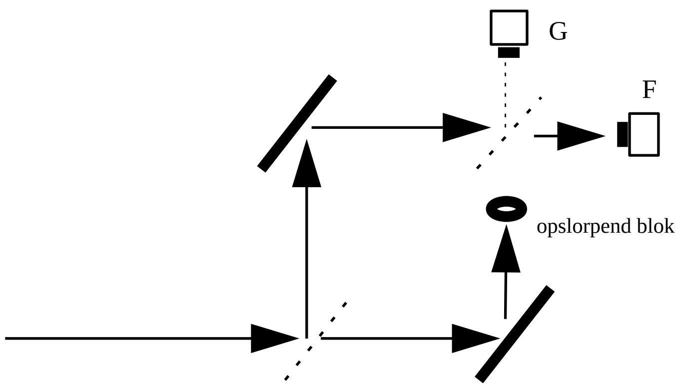
Hier komen Cardano's waarschijnlijkheden in de quantumfysica binnen. Onbepaaldheid en waarschijnlijkheid doen dus hun intrede pas bij het meten. Penrose toont ook hoe dit in een concrete situatie in zijn werk gaat (pp. 264 vv.)

Vervangen we in onze voorgaande tekening de spiegel rechts onderaan door een fotocel, dan zal deze fotocel geconfronteerd worden met de toestand $|B\rangle + i|C\rangle$, waarbij $|B\rangle$ er voor zorgt dat de fotocel inslaat, terwijl $|C\rangle$ de fotocel onaangeroerd laat. De kans op een van de twee mogelijke uitkomsten (ofwel activeert het foton de fotocel ofwel niet) is dus gelijk aan $|1|^2 + |i|^2 = 1:1$.

Maar als we nu de spiegel rechts onderaan laten staan, en we laten de bundel die hij weerkaatst en die correspondeert met de fototoestand $|D\rangle$, opslorpen door een blok, dan zal het eerdere interferentiefenomeen teniet gedaan worden. In dat geval zou het foton kunnen opduiken in een toestand die de mogelijkheid $|G\rangle$ meebrengt (naast de mogelijkheid $|F\rangle$), op voorwaarde dat het foton niet wordt opgeslorpt door het blok. Wordt het foton wél opgeslorpt door het blok, dan zal het foton in geen enkele combinatie van de toestanden ($|F\rangle$ of $|G\rangle$) opduiken. Wordt het foton niét opgeslorpt door het blok, dan zal zijn toestand bij het naderen van de laatste spiegel gelijk zijn aan $-|E\rangle$, wat resulteert in

$-|F\rangle - i|G\rangle$, zodat de beide alternatieven ($|F\rangle$ en $|G\rangle$) inderdaad opduiken in het eindresultaat.

Als nu het blok het foton niet opslorpt, dan zijn de respectievelijke waarden van de complexe getallen voor de twee mogelijkheden ($|F\rangle$ en $|G\rangle$) gelijk aan -1 en -i, aangezien de uiteindelijke toestand gelijk is aan $-|F\rangle - i|G\rangle$. De verhouding van de respectievelijke kansen is dus gelijk aan $|-1|^2 : |-i|^2$, wat betekent: gelijke kansen voor beide mogelijke uitkomsten, zodat de kans dat het foton de detector activeert in F, even groot is als de kans dat hij de detector activeert in G.



Nu moet het blok (de obstructie) zelf als een meetapparaat worden beschouwd, want het ‘absorberend blok’ en het ‘niet-absorberend blok’ zijn klassieke alternatieven waaraan geen waarden van complexe getallen toegewezen zijn. Van belang is het volgende: als het blok het foton opslorpt, dan wordt een deel van de substantie van het blok door het foton vernietigd, zodat het onmogelijk wordt om alle informatie die met deze vernietiging te maken heeft, bij te houden, inbegrepen de interferentie-effecten die het quantum-fenomeen karakteriseren. Dus moeten we het blok als een klassiek object beschouwen, dus als een meetapparaat, onafgezien van het feit of het de absorbtie al dan niet waarneembaar registreert.

Om de kans te berekenen dat het blok het foton opslorpt, mogen we dus de regel van de vierkante modulus gebruiken. De toestand van het foton bij het naderen van het blok is gelijk aan $i|D\rangle - |E\rangle$. Het blok absorbeert het foton als dit in toestand $|D\rangle$ verkeert, en het absorbeert het foton niet als dit in toestand $|E\rangle$ verkeert. De kans van opslorping tegenover de kans van niet-opslorping is gelijk, want is gelijk aan $|i|^2 : |-1|^2 = 1:1$.

Penrose geeft dan nog een voorbeeld waarbij de spiegel rechts onderaan vervangen wordt door een detecterende 'weegschaal' die moet aangeven of het foton al dan niet gereflecteerd wordt door de spiegel. Maar ook in dat geval wordt de interferentie teniet gedaan, en is detector G onbekwaam om het proton te detecteren. Hij besluit door te zeggen dat deze experimenten, waarbij het klassieke en het quantumniveau noodzakelijkerwijze door elkaar moeten gehaspeld worden, ons dus niet wijzer maken omtrent de mysteries van de quantumtheorie.

In de volgende paragraaf wordt het 'Elitzur-Vaidman bomb-testing problem' aangepakt. De daaropvolgende paragraaf behandelt de quantum theorie van de spin en de bol van Riemann. Vervolgens wordt de relatie tussen positie en moment van een deeltje besproken, de ruimte van Hilbert, en op basis daarvan een beschrijving van de quantum-sprong. Na nog enkele uiteenzettingen omtrent technische aangelegenheden in de quantumtheorie, wordt ook het magische twaalfvlak behandeld.

(Wordt vervolgd)

(J.B., 10 oktober 1999)