Het Vermoeden van Goldbach

Een bewijs

Jan Bauwens

D/2005/Jan Bauwens, uitgever

Tweede uitgave

NUR: 918

ISBN: 90-77532-07-2

Jan Bauwens Serskamp 2004-2005

Woord vooraf en inhoudelijk overzicht

Het naar de Duits wiskundige, Christian Goldbach (1690-1764) genoemde vermoeden, dat elk even getal groter dan *2* kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen, bleef tot heden een onopgelost raadsel. Althans zo wordt beweerd. Met dit werkje spreekt de auteur deze bewering alvast tegen.

Dit bewijs ontstond vanuit de intuïtie dat het Goldbachprobleem pas oplosbaar wordt indien de ontbinding van getallen zowel in termen als in factoren, en wel tegelijkertijd in termen en in factoren, 'in beeld' kan worden gebracht.

Behalve het algebraïsch bewijs worden hier dan ook getalsvoorstellingen gebracht waarop de beide soorten ontbindingen tegelijk zichtbaar zijn.

Deze tweede, gewijzigde uitgave van *Het Vermoeden van Goldbach. Een bewijs* verschilt van de eerste uitgave (2004) in slechts één zin: het *algebraïsch* Goldbachbewijs waarvan in de eerste uitgave slechts een schets werd gegeven, werd hier geheel geëxpliciteerd. De andere benaderingen werden grotendeels ongewijzigd behouden.

Vooraf moet opgemerkt worden dat de drie paragrafen waaruit dit werkje bestaat, onderling onafhankelijk zijn. De eerste paragraaf is de belangrijkste en geeft het algebraïsch Goldbachbewijs. De tweede en de derde paragraaf bieden elk een meer intuïtieve benadering van het Goldbachprobleem met de bedoeling een (niet-algebraïsch) 'logisch' inzicht in de onbetwijfelbaarheid van de stelling te geven.

De inhoud ziet er als volgt uit:

Serskamp, 2004-2005

Het bewijs van Goldbachs vermoeden

§1. Het algebraïsch bewijs

Goldbachs te bewijzen: *"Elk even getal E groter dan* 2 *kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen."*

> (!) Hoe gaan we in dit bewijs te werk? De hoofdstructuur vormt een bewijs uit het ongerijmde. Het bewijs heeft de volgende vorm: *als* Goldbach onwaar is, *dan* volgt een contradictie.

Het bewijs:

Stel dat Goldbach onwaar is. Dan bestaat er tenminste één even getal E zodat zal gelden dat in de gelijkheid $p_i+(E-p_i)=E$ (°), de term $(E-p_i)$ altijd een samengesteld getal zal zijn (met p_i ongeacht welk priemgetal kleiner dan E).

> (!) Omdat Goldbach zegt dat elk even getal groter dan *2* kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen, houdt de vooronderstelling dat Goldbach onwaar is in, dat er tenminste één even getal E groter dan *2* bestaat dat niet kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen. Hoe zal dat even getal E er dan uitzien? Het zal een getal E zijn waarvoor geldt dat alle priemgetallen kleiner dan E moeten opgeteld worden bij een samengesteld getal teneinde E te be-

komen. Nu geven wij aan al die priemgetallen kleiner dan E de naam p. Het getal p is dus een variabele, wat betekent dat p elke waarde kan hebben die oplossingen levert voor onze gelijkheid "(°)". Om een reden die later duidelijk zal worden, geven we aan p ook een index mee, en we spreken voortaan over p_i. Met die index willen we echter p geenszins instantiëren, echter alleen een weinig specifiëren waar dat noodzakelijk is.

Als nu Goldbach onwaar is, dan weten we over de getallen welke bij ongeacht welke p dienen opgeteld te worden om E te bekomen, en dat zijn alle getallen $(E-p_i)$, anders genoemd: de complementen van alle p_i , dat ze samengesteld zullen zijn. Dat ze samengesteld zijn, betekent dat ze bestaan uit tenminste twee priemfactoren. We geven deze getallen $(E\text{-}p_i)$ dan ook de naam mp_j . Er geldt dus dat $(E\text{-}p_i)=mp_j$. In die naam slaat p_j , zoals gezegd, op één van de "tenminste twee" genoemde priemfactoren waaruit mp_j dient te bestaan, en dus: waaruit elk van de complementen van de priemgetallen kleiner dan *E* dienen te bestaan. De tweede priemfactor zit verborgen in de factor *m*. Dat betekent dat *m* een natuurlijk getal is groter dan *1*. Het is mogelijk dat *m* honderdduizend verschillende priemfactoren bevat, of honderdduizend dezelfde, of dat een aantal priemfactoren er slechts eenmaal inzitten en een aantal andere meermaals, of dat p_j nog een aantal keren in m zit, ofwel niet. Al deze mogelijkheden laten we in het midden omdat ze niet van belang zijn voor onze bewijsvoering. De enige zinvolle eis die we, alvast hier, aan *m* moeten stellen is dat *m* natuurlijk is en groter is dan *1*.

Er zal dus gelden: $(E-p_i)=mp_j$, met *m* een natuurlijk getal groter dan *1*, en p_i en p_j , beide priem, niet noodzakelijk verschillend van elkaar.

(!) We stellen dus dat p_i en p_j onderling onderscheiden worden. We weten al dat zij priemgetallen zijn en variabelen, maar in wat volgt blijkt de zin van de specificatie die we middels de toegevoegde index hebben aangebracht: we zullen namelijk twee mogelijkheden onderscheiden.

Nu zijn er twee mogelijkheden: ofwel zijn p_i en p_j altijd (*) gelijk aan elkaar, ofwel verschillen ze altijd (*) van elkaar.

> (!) Men kan zich hier afvragen waarom we er zo zeker van zijn dat een derde mogelijkheid uitgesloten wordt, namelijk: gevallen waarin telkens een bepaalde p_i gelijk zou zijn aan een bepaalde p_j , alsook gevallen waarin telkens een bepaalde p_i verschillend zou zijn van een bepaalde p_j. Het bewijs van het uitgesloten zijn van deze derde mogelijkheid wordt geleverd in de paragraaf aangegeven met "(*)", bij het slot van dit bewijs.

Stel geval 1: $p_i=p_j$. Dan volgt uit $(E-p_i)=mp_j$ dat $(E-p_i)=mp_i$ en dat $E=mp_i+p_i$ en dat

$E=p_i(m+1)$. [We weten dat geldt: $m>1$, zodat we weten dat $m+1$ minstens 3 is; maar we weten ook dat $p_i(m+1)$ even moet zijn, dus weten we ook dat $(m+1)$ even moet zijn, en dat m minstens 3 is en altijd oneven. Dat speelt echter geen rol]. Wat de gelijkheid $E=p_i(m+1)$ in dit geval zegt, is dit: "E is een veelvoud van p_i ; E bevat de factor p_i."

> (!) In andere bewoordingen: indien we p_i en p_j onderling mogen verwisselen, dan weten we dat p_i een factor is van E. Maar omdat p_i ongeacht welk priemgetal kleiner dan E vertegenwoordigt, kan E onder deze omstandigheden niet bestaan, want een E die alle priemfactoren kleiner dan zichzelf bevat, kan daartoe nooit groot

genoeg zijn. Dat betekent dat dit eerste geval, waarin namelijk geldt dat $p_i = p_j$, tot een contradictie leidt. Nog anders gezegd: in het eerste geval kan Goldbach niet onwaar zijn.

Mocht de lezer niet overtuigd zijn van wat we zopas zegden, namelijk dat p_i ongeacht welk priemgetal kleiner dan E vertegenwoordigt, en dat E dus alle priemfactoren kleiner dan zichzelf moet bevatten, (zodat E onder deze omstandigheden niet kan bestaan omdat een E die alle priemfactoren kleiner dan zichzelf bevat, daartoe nooit groot genoeg kan zijn), het volgende:

We moeten ons hier goed realiseren dat p_i hier elk mogelijk priemgetal kleiner dan E vertegenwoordigt. Immers, indien we ook maar één p_i (één van alle priemgetallen kleiner dan E) zouden uitsluiten of vergeten, dan zouden we onze stelling uit het ongerijmde verloochenen. Met betrekking tot het eerste geval (waar gesteld wordt dat geldt: $p_i = p_j$) zegt die stelling immers: als we elk van de priemgetallen kleiner dan E, beurtelings aftrekken van E, dan verkrijgen we telkenmale getallen welke samengesteld zijn uit, onder meer, het in dat geval afgetrokken priemgetal zelf. Ik verduidelijk met een 'voorbeeld': $E-2=2m$; $E-3=3m$; $E-5=5m$; $E-7=7m$; $E-11=11m$... (E is een constante; m is een variabele; p_i is achtereenvolgens en geval per geval elk priemgetal kleiner dan E, te beginnen bij *2*). Men ziet hier dat wel degelijk werd aangetoond dat in dat geval *iedere* p_i *kleiner dan E*, ook een *deler* van *E* zal zijn.

Stel geval 2: p_i verschilt van p_j.

(!) Dit geval kan interpretatieproblemen leveren, vandaar wat meer uitleg. Dat we stellen dat p_i altijd moet verschillen van p_j , meer bepaald in de gelijkheid $(E-p_i)=mp_j$, betekent niet dat p_i en p_j nu welbepaalde getallen vertegenwoordigen: ze blijven variabelen, net zoals voordien, maar we eisen nu van hen dat ze — weliswaar geval per geval — nooit aan elkaar gelijk zijn. Zo worden al de volgende gevallen uitgesloten: *E-2=m.2, E-3=m.3, E-5=m.5, E-7=m.7, E-11=m.11,* enzovoort. Stel dat *30* een getal *E* zou zijn dat Goldbach zou tegenspreken, dan betekent ons tweede geval hier dat we alle gevallen van onze gelijkheid waarin de priemfactoren *2, 3* en *5* functioneren als p_i of als p_j , uitgesloten moeten worden, precies omdat zij de vooronderstelling van dit geval, namelijk dat p_i en p_j onderling moeten verschillen, tegenspreken. Zo mag, in het genoemde voorbeeld, ***2*** niet meespelen omdat in *30-**2**=14.**2*** geldt dat $\boldsymbol{p_i}$ gelijk is aan $\boldsymbol{p_j}$. Zo mag ***3*** niet meespelen omdat in *30-**3**=9.**3*** geldt dat $\boldsymbol{p_i}$ gelijk is aan $\boldsymbol{p_j}$. Zo mag ***5*** niet meespelen omdat in *30-**5**=5.**5*** geldt dat $\boldsymbol{p_i}$ gelijk is aan $\boldsymbol{p_j}$.

Dan volgt uit $(E-p_i)=mp_j$ dat p_j nooit een factor van *E* kan zijn.

(!) Deze gevolgtrekking zullen we onmiddellijk bewijzen. Waarom maken we deze gevolgtrekking? Omdat, als we ons ervan kunnen verzekeren dat de getallen p_j nooit factoren van E zijn, we ook weten dat p_i de enige factoren van E zijn, want als p_i en p_j alle priemgetallen kleiner dan E vertegenwoordigen — wat ze ook doen als ze onderling onderscheiden moeten zijn —, dan zijn er behalve p_i en p_j geen andere priemgetallen kleiner dan E. Als we dan weten dat de factoren p_i de enige priemfactoren van E zijn, dan weten we dat de gevallen p_j verschillend van p_i niet bestaan, en dat dus ons tweede geval niet kan bestaan.

<u>Het bewijs</u>:

(!) We bewijzen nu dat een p_j verschillend van p_i nooit een factor van E kan zijn. Dit bewijs is een bewijs uit het ongerijmde: we maken de veronderstelling dat p_j wel een factor van E is, en we zien dat uit deze veronderstelling een conclusie volgt die onze uitgangspunten tegenspreekt.

Stel dat p_j een factor is van E, en dat dus zou gelden dat $E=bp_j$, met b een natuurlijk getal groter dan 1, dan volgt uit $(E-p_i)=mp_j$ dat geldt: $bp_j-p_i=mp_j$, waaruit $bp_j-mp_i=p_i$, waaruit $(b-m)p_j=p_i$. Dat zou betekenen: ofwel dat p_i een veelvoud zou zijn van p_j [namelijk als $(b-m)>1$], wat onmogelijk is omdat beide priem zijn; ofwel dat $p_i=p_j$ [namelijk als b-

$m=1$], wat ons terugleidt naar geval 1; ofwel dat $p_i=p_j=0$ [namelijk als $b=m$], waardoor E zou gelijk worden aan 0 of aan 2 [maar hierbij moet reeds opgemerkt worden dat m oneven is terwijl b even moet zijn aangezien we gesteld hebben dat $E=bp_j$, zodat $b=m$ onmogelijk is]. Tot hier dit bewijs. Geval 2 leert ons dus dat in de gelijkheid $(E-p_i)=mp_j$, waarbij p_i en p_j verschillend zijn, E nooit een andere priemfactor kan bevatten dan p_i , behalve dan de even priemfactor 2 [$(E-p_i)=mp_j$ wordt dan: $2-2=0$].

> (!) Met betrekking tot de gelijkheid $(b-m)p_j=p_i$ zou men kunnen in de verleiding gebracht worden om te denken dat het misschien mogelijk is dat er, naast p_i en

p_j nog andere priemgetallen zouden kunnen in het spel zijn, namelijk priemgetallen die noch aan p_i noch aan p_j gelijk zouden zijn, en die factoren zouden kunnen zijn van E. Tot deze misvatting zou men immers gemakkelijk kunnen komen wanneer men, (1°), ertoe verleid wordt om aan voorbeeldjes te denken en, (2°), wanneer men bovendien zou vergeten dat we hier redeneren onder de veronderstelling dat Goldbach onwaar zou zijn. De combinatie van deze twee misvattingen zou dan makkelijk aanleiding kunnen geven tot de twijfel aan onze nochtans formeel bewezen conclusie. Laat ik eerst meer bepaald concretiseren aan de hand van welke gedachten deze twijfel zou kunnen rijzen.

Men zou bijvoorbeeld kunnen denken aan een concreet even getal, zoals *30*, en dan de veronderstelling maken dat Goldbach tegengesproken zou worden door het geval $E=30$. Men zou hierbij kunnen denken aan een instantiëring van onze gelijkheid als volgt:

Onze gelijkheid luidt: $E\text{-}p_i=mp_j$. We stellen E gelijk aan *30*, en we stellen p_i gelijk aan *2*. Dan kunnen we bijvoorbeeld m vervangen door *4*, en p_j wordt dan *7*, zodat we krijgen dat $30\text{-}2=4.7$. Inderdaad, zo zou men kunnen opmerken, *7* is geen factor van *30*, maar bijvoorbeeld de priemgetallen *2, 3* en *5* zijn dat wel! Wat is nu fout aan deze opmerking waartoe men zo makkelijk verleid kan worden? Het foutieve van deze opmerking ligt in het feit dat men zodoende vergeten blijkt te zijn dat wij werken onder de veronderstelling dat p_i verschilt van p_j. Meer concreet kunnen wij het misleidende voorbeeld gemakkelijk tegenspreken door er op te wijzen dat in al die gevallen waarin één van de genoemde priemfactoren (*2, 3* of *5*) in het geding is, p_i noodzakelijkerwijze gelijk is aan p_j. Laten we deze gevallen hier dan ook nogmaals uitschrijven:

in $30-\underline{\mathbf{2}}=14.\mathbf{2}$ geldt dat $\underline{\boldsymbol{p_i}}$ gelijk is aan $\boldsymbol{p_j}$;

in $30-\underline{\mathbf{3}}=9.\mathbf{3}$ geldt dat $\underline{\boldsymbol{p_i}}$ gelijk is aan $\boldsymbol{p_j}$:

in $30-\underline{\mathbf{5}}=5.\mathbf{5}$ geldt dat $\underline{\boldsymbol{p_i}}$ gelijk is aan $\boldsymbol{p_j}$.

Dus: *2, 3* en *5* zijn inderdaad factoren van *30*, maar in alle gevallen waar zij oplossingen bieden aan onze gelijkheid, voldoen zij niet aan de eis dat daar p_i en p_j verschillend moeten zijn. En die eis constitueert het tweede geval waaronder wij werken.

Twijfelaars, niettemin het hen onmogelijk is om een formele weerlegging te geven van het bewezene, zouden nu het been stijf kunnen houden, en kunnen opwerpen dat de priemfactoren *2, 3* en *5* hoe dan ook factoren van *30* zijn en blijven. Welnu, om hen van deze misvatting te bevrijden, kunnen wij er tenslotte nog op wijzen dat het getal $E=30$ uit het verraderlijke voorbeeld, in werkelijkheid niet kan bestaan... precies omdat, als p_j verschilt van p_i , dan kan p_j geen factor van E ("*30*") zijn.

<u>Conclusie</u>:

Als p_i en p_j verschillend zijn, kan p_j geen factor zijn van E, zoals hoger aangetoond. Duidelijk is ook dat dan ook p_i geen factor kan zijn van E. In geval *2* is p_i immers geen factor van $E\text{-}p_i$, en dus ook niet van E.

> (!) Ziehier waarom p_i geen factor is van E: <u>stel</u> dat p_i een factor is van E. Dan is p_i een factor van $E\text{-}p_i$. Dan is p_i een factor van m want $E\text{-}p_i=mp_j$. Stel dat $m=np_i$, dan geldt dat $E\text{-}p_i=(np_i)p_j$. Dat kunnen we ook schrijven als: $E\text{-}p_i=(np_j)p_i$. Hierin wordt $m=np_j$, en dus staat er: $E\text{-}p_i=mp_i$. Edoch, we hadden als vooronderstelling gesteld dat p_i verschillend moest zijn van

p_j, wat hier niet het geval is, want we zitten hier terug in geval 1. Dus kan p_i geen factor zijn van *E*. Nogmaals: in m mogen er allerlei factoren zitten, maar niet p_i, want dan kan p_i eruit gehaald worden en p_j erin gestopt worden en dan krijgen we een vorm die alleen geldt in geval 1.

Dus kunnen, in geval 2, noch p_j noch p_i factor zijn van *E*. Maar gegeven is dat p_i en p_j wel priem zijn.

Als Goldbach onwaar is, dan geldt dat in de gelijkheid $(E-p_i)=mp_j$, de priemfactoren p_i en p_j noodzakelijk dezelfde zijn. In dat geval echter, is *E* een veelvoud van p_i. Nu representeert p_i elk mogelijk priemgetal kleiner dan E. Dus zal E alle priemfactoren kleiner dan E zelf moeten bevatten opdat Goldbach onwaar zou zijn. Maar middels de stelling die zegt dat tussen elk getal en zijn dubbel minstens één priemfactor ligt (dit is het postulaat van Bertrand, dat als stelling bewezen werd door Tschebycheff), is aantoonbaar dat E daartoe nooit groot genoeg kan zijn. Dus kan Goldbach nooit onwaar zijn. Wat te bewijzen was.

> (!) We herinneren er aan: in het eerste geval leidt de veronderstelling dat altijd geldt dat $p_i=p_j$, tot de conclusie dat Goldbach niet onwaar kan zijn; in het tweede geval blijkt de veronderstelling dat p_i altijd verschillend is van p_j , tot een tegenspraak, en dus tot dezelfde conclusie. Vandaar: welk geval wij ook kiezen,

wij moeten steeds concluderen dat Goldbach niet onwaar kan zijn.

(*) We bewijzen nu dat dit "altijd" het geval is, en dus: dat het nooit zo kan zijn dat de ene keer deze priemgetallen zouden gelijk zijn aan elkaar terwijl ze de andere keer zouden verschillend zijn van elkaar. Stel namelijk dat in $(E\text{-}p_i)=mp_j$, p_i verschilt van p_j, dan kan, zoals hoger aangetoond, E de factor p_j niet bevatten, en dan is E geen veelvoud van p_j; als, daarentegen, in $(E\text{-}p_j)=np_k$, $p_j=p_k$, dan moet E de factor p_j bevatten; omdat de implicanda van deze twee vooropstellingen onderling tegenstrijdig zijn, kunnen deze vooropstellingen niet gemaakt worden. Vandaar: ofwel geldt telkens dat in de gelijkheden van de vorm $(E-p_i)=mp_j$ de betrokken priemgetallen links en rechts van het gelijkheidsteken dezelfde zijn, ofwel geldt telkens dat ze onderling verschillend zijn, maar nooit kan gelden dat ze nu eens onderling gelijk zouden zijn en dan weer onderling verschillend, want vanaf het ogenblik dat het geval optreedt waarbij in één gelijkheid van die vorm de beide priemgetallen gelijk zijn terwijl er in een andere gelijkheid van die vorm de beide priemgetallen verschillend zijn, rijst een contradictie. Hiermee is ook "(*)" bewezen.

Ziehier nu deze laatste paragraaf "(*)" wat meer expliciet

De stelling "(*)" luidt als volgt:

Als het 'complement' van een priemgetal p_i kleiner dan E kan geschreven worden als een samengesteld getal dat een priemfactor p_j bevat welke verschilt van het gegeven priemgetal p_i, dan kan deze p_j geen factor zijn van zijn eigen 'complement'. (NB: Met "complement van *p*" wordt hier bedoeld: "*E-p*").

Formeel: als $E\text{-}p_i\text{=}m'p_j$ (met p_i en p_j oneven) dan niet $E\text{-}p_j\text{=}m''p_j$. En dan heeft $E\text{-}p_j$ geen enkele factor gemeenschappelijk met *E*. (***)

<u>Bewijs</u>: we bewijzen dat $m''p_j$ geen enkele factor van $E\text{-}p_j$ bevat (want $m''p_j\text{=}E\text{-}p_j$): reeds bewezen is dat p_j geen factor kan zijn

van E. We bewijzen nu ook, via een reductio ad absurdum, dat m'' geen enkele factor van E kan bevatten: stel namelijk dat m'' een factor bevat van E, zodat $m''=f.n$, dan vervangen we dit in $E-p_j=m''p_j$ en we krijgen dat $E-p_j=f.n.p_j$. Maar dan is $E=f.n.p_j+p_j = p_j(f.n+1)$: zoals men kan zien, zou in dat geval ook p_j een factor zijn van E, wat reeds uitgesloten werd. Dus bevat ook m'' geen factor uit E.

Ik sluit dus niet uit dat in het hier boven onderstreepte geval dit 'complement' ook **schrijfbaar** kan zijn als $m'p_i$ (zoals dat bvb. het geval zou kunnen zijn met $E=50$, $p_i=5$, $p_j=3$, $m=15$ en $m'=9$, zodat dan geldt: $50-5=15.3=9.5$. Maar merk hier wel op dat de reden waarom *50-5* ook schrijfbaar is als *9.5*, ligt in het feit dat p_j, zijnde *3*, een factor vormt van *m*, zijnde *15*), maar we mogen deze gevallen uitsluiten omdat ze niet relevant zijn in ons bewijs, zoals ik verderop zal aantonen in de paragraaf "(£)". Het komt er daar immers enkel op aan dat we het volgende weten:

Als, voor **een zeker priemgetal** p_i, het geval 2 zich voordoet, en dat betekent: als E-$p_i=mp_j$ met p_i *ongelijk* aan p_j, dan kan er **geen ander priemgetal** p_j meer optreden waarvoor zou gelden dat E-$p_j=mp_k$ met p_j *gelijk* aan p_k. (°). <u>Bewijs</u>: stel dat E-$p_i=mp_j$ met p_i ongelijk aan p_j, dan kan p_j geen factor zijn van E (wegens (***)), en dus ook niet van E-p_j. (Om het gegeven voorbeeld hier toe te passen: *als* 50-5 *kan geschreven worden als* 15.3*, dan kan* 50-3 *nooit meer geschreven worden als een getal met daarin de factor* 3).

Waarom volstaat dit nu voor het bewijs?

Als Goldbach onwaar is, dan moeten we eisen dat het 'complement' van *elk* priemgetal kleiner dan E, samengesteld is.

Nu onderscheidden we twee gevallen in de formule: E-p_i=mp_j, namelijk een eerste geval waarbij p_i en p_j altijd onderling gelijk zijn, en een tweede geval waarbij p_i en p_j altijd onderling verschillend zijn (£). We herinneren eraan dat hier p_i en p_j geen geïnstantieerde waarden van priemgetallen waren: ze representeerden *elk* priemgetal kleiner dan E, zij het aangevuld met de specifieke beperking naar gelang het geval. De grond van deze werkwijze is stelling "(*)", waarin beweerd wordt dat geval 1 en 2 zich nooit tegelijk kunnen voordoen. Wat betekent dat nu?

(£) Wat bedoelen we nu met "altijd onderling gelijk" en "altijd onderling verschillend"?

(1°) "altijd onderling gelijk": Dat, in de gelijkheid $E\text{-}p_i=mp_j$, deze p_i en p_j altijd onderling gelijk zijn, wil hier zeggen dat we alle gevallen uitsluiten waarbij p_i en p_j onderling verschillend zijn. Dit wil zeggen dat we alle gevallen uitsluiten waarbij de gelijkheid kan geschreven worden als $E\text{-}p_i=mp_j$ met p_i en p_j ongelijk. We sluiten dus alle gevallen uit waarbij de variabele m een factor p_j verschillend van p_i zou bevatten. We sluiten dus alle gevallen uit waarbij, in m verborgen, een factor p_j verschillend van p_i zou zitten. Nog anders gezegd: we verbieden dat m een factor p_j verschillend van p_i zou bevatten.

(2°) "altijd onderling verschillend": Dat, in de gelijkheid $E\text{-}p_i=mp_j$, deze p_i en p_j altijd onderling verschillend zijn, wil hier zeggen dat we alle gevallen uitsluiten waarbij p_i en p_j onderling gelijk zijn. Dit wil zeggen dat we alle gevallen uitsluiten waarbij de gelijkheid kan geschreven worden als $E\text{-}p_i=mp_j$ met p_i en p_j gelijk. We sluiten dus alle gevallen uit waarbij de variabele m een factor p_j

gelijk aan p_i zou bevatten. We sluiten dus alle gevallen uit waarbij, in *m* verborgen, een factor p_j gelijk aan p_i zou zitten. Nog anders gezegd: we verbieden dat m een factor p_j gelijk aan p_i zou bevatten.

De cruciale vraag hierbij is vanzelfsprekend deze: vergeten we nu niet een aantal bijzondere gevallen, namelijk die gevallen waarbij er toch priemgetallen in m verborgen zitten die, respectievelijk het eerste en het tweede geval, verschillend van of gelijk aan p_i zijn.

Welnu, wat ik in de paragraaf "(*)" wezenlijk beweer, is dit: als we de veronderstelling waaronder we werken (namelijk dat Goldbach onwaar is) in acht nemen, en als we dus in acht nemen dat het complement van elk priemgetal samengesteld is, dan doen deze 'bijzondere gevallen' zich niet voor. Dit aantonen is eenvoudig: we moeten slechts bewijzen dat uit $E\text{-}p_1=m'p_2$ nooit kan volgen dat $E\text{-}p_2=m''p_2$, en nooit dat $E\text{-}p_3=m'''p_3$, $E\text{-}p_4=m''''p_4$, enz. Als dat aangetoond is, is ook aangetoond dat deze 'bijzondere gevallen' hier uitgesloten zijn en dat de splitsing van het probleem in de twee gestelde gevallen gerechtvaardigd en sluitend is. Het bewijs volgt in de paragraaf getiteld: "Ziehier tenslotte...".

Dat betekent: als we een specifiek geval (hier dus met een geïnstantieerde waarde voor het priemgetal p_i, en dus voor **een zeke-**

re p_i) vinden waarbij $E\text{-}p_i=mp_j$ met p_i ongelijk aan p_j, dan zullen we nooit nog **een ander** priemgetal p_j vinden zodat $E\text{-}p_j=mp_k$ met $p_j=p_k$. Immers, alleen het vinden van een ander priemgetal $p_j=p_k$, of dus een p_j die een factor is van $E\text{-}p_j$ en dus ook van E, zou resulteren in een tegenspraak met het vooropgestelde.

Met andere woorden: als we een specifiek geval (hier dus met een geïnstantieerde waarde voor het priemgetal p_i, en dus voor **een zekere** p_i) vinden zodat $E\text{-}p_1=mp_2$ met p_1 ongelijk aan p_2, dan zullen we nooit nog **een ander** priemgetal p_2, p_3, p_4, enz. vinden zodat $E\text{-}p_2=mp_2$, $E\text{-}p_3=mp_3$, $E\text{-}p_4=mp_4$, enz. Immers, alleen het vinden van een ander priemgetal p_2, of dus een p_2 die een factor is van $E\text{-}p_2$ (idem voor p_3, p_4, enz.) en dus ook van E, zou resulteren in een tegenspraak met het vooropgestelde.

Ter controle: stel dat de gezochte p_j zou bestaan, waarvan we alvast weten dat het een priemgetal is kleiner dan E, dan zou ook zijn 'complement', zijnde $E\text{-}p_j$, samengesteld moeten zijn teneinde te kunnen voldoen aan de vooronderstelling (namelijk: dat Goldbach onwaar is). Als we dan zouden aannemen dat we een gelijkheid verkregen van de vorm $E\text{-}p_j=mp_k$ met p_k gelijk aan p_j, dan zou in dat geval p_j een factor zijn van E. Doch dit laatste hebben we al uitgesloten met de stelling "(***)".

Ziehier enkele concrete voorbeelden:

Als $E\text{-}2=m'' . 3$, dan niet $E\text{-}3=m''' . 3$;

Als $E\text{-}3=m''' . 5$, dan niet $E\text{-}5=m''''' . 5$;

Als $E\text{-}2=m'' . 7$, dan niet $E\text{-}7=m''''''' . 7$;enz.

ZIEHIER TENSLOTTE DE FORMELE UITSLUITING VAN DE LAATST MOGELIJKE TEGENWERPING:

Het geval dat nog kan geopperd worden is:

Stel dat én $E\text{-}p_1=m'p_2$ én $E\text{-}p_3=m''p_3$ beide het geval zijn. (°°°)

We weten:

(1°) **Als $E\text{-}p_1=m'p_2$ dan nooit $E\text{-}p_2=m''p_2$ en dan is p_2 geen factor van E (°). Maar ook m'' bevat dan geen enkele factor van** ***E*** (wegens "(***)"). We geven hier nogmaals het bewijs: stel dat m'' een factor bevat van E, zodat $m''=f.n$, dan vervangen we dit in E-$p_2=m''p_2$ en we krijgen dat $E\text{-}p_2=f.n.p_2$. Maar dan is $E=f.n.p_2+p_2 = p_2(f.n+1)$: zoals men kan zien, zou in dat geval ook p_2 een factor zijn van E, wat reeds uitgesloten werd. Dus bevat ook m'' geen factor uit E.

(2°) **Als $E\text{-}p_3=m'''p_3$ dan nooit $E\text{-}p_2=m''p_3$.** Bewijs: We weten: <u>als $E\text{-}p_2=m''p_3$ dan nooit $E\text{-}p_3=m'''p_3$</u> [Hier slaan p_2 en p_3 op respectievelijk p_i en p_j van de algemene regel (de

vette tekst in het begin van dit bewijs) die zegt: als $E\text{-}p_i=m''p_j$ dan nooit $E\text{-}p_j=m'''p_j$].
Volgens de regel uit de logica: *(*als *A* dan niet *B)* is equivalent met (als *B* dan niet *A*), kunnen we de bovenstaande (onderstreepte) implicatie herschrijven tot de volgende: als $E\text{-}p_3=m'''p_3$ dan nooit $E\text{-}p_2=m''p_3$.

De vraag luidt nu: volgt hieruit een contradictie?

Ziehier het antwoord:

gegeven zijn reeds de volgende vier gevallen:

$E\text{-}p_1=m'p_2$ (1) en

$E\text{-}p_3=m'''p_3$ (2) en

niet $E\text{-}p_2 = m''p_2$ (3) en

niet $E\text{-}p_2 = m''p_3$ (4).

Het geval (2) zegt ons dat p_2 geen factor is van E.

Maar alvast moet $E\text{-}p_2$ samengesteld zijn (Goldbach wordt immers verondersteld onwaar te zijn).

Stel $E\text{-}p_2 = m''p'$ met vanzelfsprekend p_2 ongelijk aan p', wegens (3). (****)

Wegens gegeven "(1)", namelijk: $E\text{-}p_1 = m'p_2$, weten we dat $E\text{-}p_2$ geen enkele factor van E bevat (zie ook "(°)"). Uit $E\text{-}p_1 = m'p_2$ volgt immers dat $E\text{-}p_2$ en E geen enkele factor gemeenschappelijk hebben.

Dus bevat $m''p'$ [dat immers gelijk is aan E-p_2, wegens het gestelde in "(****)"] geen enkele factor van E. ($)

We brengen de term p_2 uit de gelijkheid "(****)" nu naar het rechter lid en we krijgen: $E=m''p'+p_2$. Hierbij merken we opnieuw op dat p' verschilt van p_2 en dat $m''p'$ geen enkele factor van E bevat (wegens "($)"), waaruit volgt dat m'' geen enkele factor van E bevat.

Maar nu moet ook $m''p'+p_2$ samengesteld zijn, want E is samengesteld.

We weten dat m'' geen enkele factor bevat uit E [wegens "(***)"] en dus ook niet uit E-p_2. Ook p_2 is geen factor van E. Wegens "(3)" geldt: als $E\text{-}p_2=m''p_2$, dan $(E\text{-}p_2):p_2=m''$ met m'' een niet natuurlijk getal. Als we nu stellen dat $E\text{-}p_2=m''p'$ [zie: "(****)"], dan moet m'' in zijn noemer de factor p' bevatten, en dan kunnen we schrijven: $E\text{-}p_2=(M:p').p'$, met M een natuurlijk getal. Dan geldt dat $E\text{-}p_2=M$. Dan is p' geen factor van $E\text{-}p_2$, en dan is $E\text{-}p_2=m''p'$ onmogelijk. Dan is $E\text{-}p_2=M$ niet samengesteld. Ter controle: stel dat M samengesteld is, en stel dat $M=N.q$, met q vanzelfsprekend geen factor van $E\text{-}p_2$, dan zou gelden: $E\text{-}p_2=N.q$, met N niet samengesteld. Opnieuw ter controle: stel dat N samengesteld is dan geldt dat $N=R.r$, met r vanzelfsprekend geen factor van $E\text{-}p_2$, dan zou gelden: $E\text{-}p_2=R.r.q$ met R niet samengesteld. Op die manier kunnen we uit onze oorspronkelijke M alle vermeende factoren halen, **maar let goed op**: geen ervan kan een factor zijn van $E\text{-}p_2$, en dus kan de gelijkheid voor geen enkele waarde opgaan. E kan dus niet samengesteld zijn, en dus alleen nog *2* zijn. Uit deze contradictie volgt dat het geopperde "(°°°)" onmogelijk is.

februari-maart-juni 2004 (19 juni 2004)

§2. Een intuïtieve bewijsgang: Goldbach in beeld

Bemerking vooraf

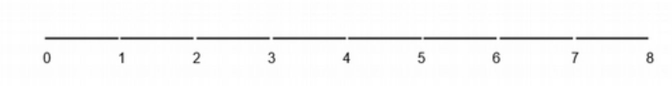
De volgende bewijsgang ontstond vanuit de intuïtie dat het Goldbachprobleem pas kon worden opgelost indien zowel de ontbinding van getallen in termen als hun ontbinding in factoren 'in beeld' kon worden gebracht, en wel tegelijkertijd. Daaruit ontstond de idee om te werken met getalsvoorstellingen waarop de beide ontbindingen tegelijk konden zichtbaar gemaakt worden. Het aanvankelijke bewijs heeft een intuïtief karakter. Het wegwerken van de informele aspecten via de formele beantwoording van mogelijke tegenwerpingen, leidde tot het formeel, algebraïsch bewijs dat hoger werd weergegeven.

We gaan in ons intuïtief bewijs te werk aan de hand van een voorbeeld. Dit teneinde een goed begrip van de bewijsvoering te bevorderen. De algemene aanpak volgt bij het slot van de redenering.

Goldbach zegt dat elk even getal groter dan *2*, schrijfbaar is als de som van twee priemgetallen.

We nemen een willekeurig even getal, bijvoorbeeld het getal *8*. Dat de genoemde hulpstelling pas geldt voor $E>8$ is geen bezwaar. Omdat we de voorstelling hier zo eenvoudig mogelijk willen houden, vragen we de lezer om nog eventjes geduld te willen oefenen: de algemene aanpak volgt dan later.

We stellen het getal *8* nu als volgt voor:

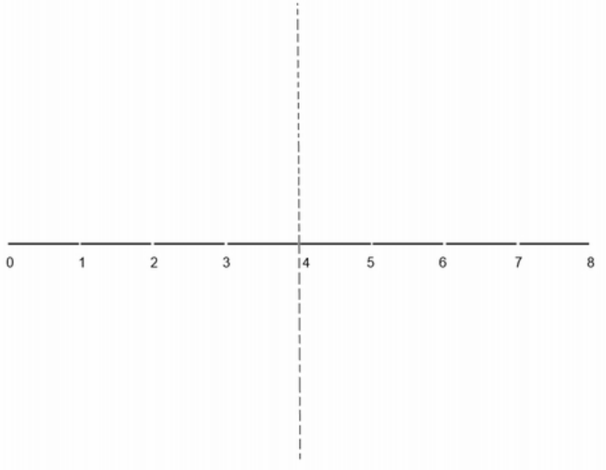


De reden waarom we de getallen voortaan op de getoonde wijze voorstellen, ligt voor de hand: we moeten elk getal tegelijk kunnen beschouwen als een eenheid welke op een welbepaald aantal verschillende manieren samenstelbaar is uit, enerzijds, verschillende termen en, anderzijds, verschillende factoren. Het Goldbachprobleem betreft namelijk een welbepaald verband tussen, enerzijds, de termen en, anderzijds, de factoren van de even getallen. Zo kunnen we op onze voorstelling duidelijk zien dat het getal *8*, voorgesteld als een lijnstuk met lengte *8*, samengesteld is uit bijvoorbeeld de termen *2* en *6*, namelijk door de lijnstukjes met lengte *2*, respectievelijk lengte *6*, bij elkaar op te tellen, en tegelijk kunnen we zien hoe *8* samengesteld is uit factoren, bijvoorbeeld de factoren *2* en *4*, namelijk waar wij kunnen zien dat de factor *2*, vermenigvuldigd met *4*, resulteert in *8*. Om dat goed te zien, zullen we verder trouwens werken met 'golven', en we plaatsen deze term tussen aanhalingstekens omdat we daarmee allerminst fysische golven bedoelen, zoals men verkeerdelijk zou kunnen geloven: het gaat om een voorstellingswijze die, zoals verderop zal blijken, louter didactisch van aard is. Zo zal de voorstelling van bijvoorbeeld het getal *8* middels golven, ons laten zien dat, bijvoorbeeld, *8* de factor *2* bevat, omdat de 'golf van *2*' de horizontale snijdt in het punt *8*. In het algemeen toont de voorstelling middels golven ons dat elk getal een veelvoud is van die priemgetallen welker respectievelijke golven de horizontale snijden in dat bewuste getal.

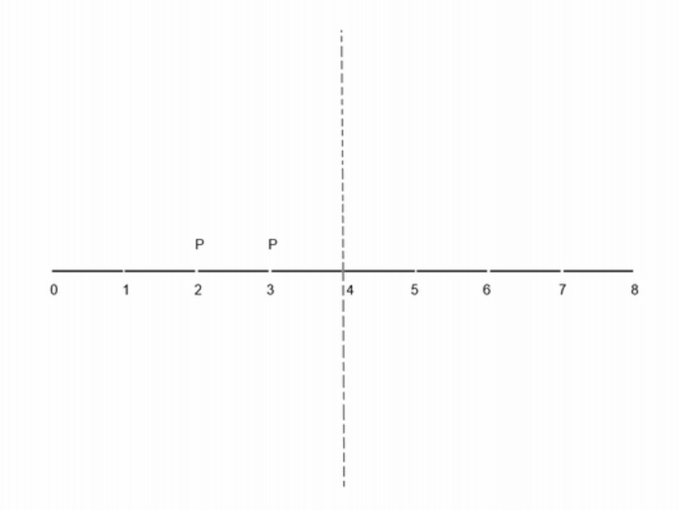
We weten dat elk even getal een natuurlijk getal als zijn helft heeft. Die helft kan een even of een oneven getal zijn, een priemgetal of een samengesteld getal.

In ons voorbeeld met het willekeurig gekozen even getal *8*, is de helft van dat getal *8* gelijk aan *4*.

We duiden het getal *4*, de helft van *8*, aan op onze voorstelling van het getal *8*, door een stippellijn te trekken doorheen het 'punt *4*' en loodrecht op het horizontale lijnstuk dat het voorbeeldgetal *8* voorstelt, als volgt:



We beschouwen nu alle priemgetallen die ofwel kleiner zijn dan, ofwel gelijk zijn aan de helft van ons even getal. In ons voorbeeld beschouwen we zodoende alle priemgetallen p_i , zodat $0<p_i\leq 4$, en in ons voorbeeld zijn dat de getallen *2* en *3*. We duiden deze priemgetallen aan met de letter "*P*" op onze voorstelling van het getal *8*, als volgt:



NB: in feite hebben we het priemgetal *2* niet nodig, omdat de 'tegenhanger' van *2*, namelijk het priemgetal dat opgeteld dient te worden bij *2* teneinde aldus als som het even getal in kwestie te bekomen, oneven zal zijn, terwijl de som van een even getal (in casu het getal *2*) met een oneven getal (de 'tegenhanger' van *2* zal immers nooit nog even zijn omdat *2* het enige even priemgetal is) nooit een even getal kan opleveren.

Volgens Goldbach's vermoeden nu, moet voor elk even getal *E*, dat groter is dan *2*, en dus ook voor het getal *8* in ons voorbeeld, gelden dat het kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen (welke elk groter zullen zijn dan *2*).

NB: we laten hier het priemgetal *2* nog meespelen om de eenvoud van ons voorbeeld geen geweld aan te doen.

We weten nu dat het eerste van die twee priemgetallen (p_1), dat altijd zal gelijk zijn aan het getal *2*, deel zal uitmaken van de 'eerste helft' van het getal *8*, terwijl het tweede van die twee priemgetallen (p_2), dat altijd zal gelijk zijn aan het getal (*E-2*), deel zal uitmaken van de 'tweede helft' van het getal

8. Met andere woorden: voor p_1 zal gelden: $0<p_1\leq 4$ en voor p_2 zal gelden: $4\leq p_2<8$.

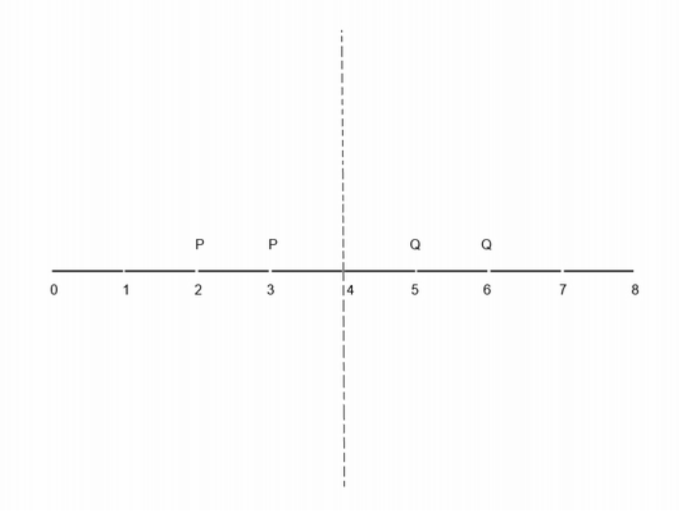
Tevens weten we, het weze herhaald, dat de som van de twee priemgetallen moet gelijk zijn aan *E*.

We beperken ons tot ons voorbeeld, en we schrijven: het vermoeden van Goldbach betekent dat *8* (zoals elk ander willekeurig even getal groter dan *2*) kan geschreven worden als: hetzij $2+x_1$, hetzij $3+x_2$, waarbij hetzij x_1 , hetzij x_2 een priemgetal is. (NB: hierbij zijn de getallen *2* en *3* de priemgetallen uit onze eerste getalshelft, terwijl x_1 en x_2 getallen zijn uit onze tweede getalshelft — getallen waarvan, ter bevestiging van Goldbachs vermoeden, er tenminste één priem moet zijn).

We beschouwen nu, op onze voorstelling van het getal *8*, de helft van *8* (namelijk het getal *4*) als een 'spiegel'. In het algemeen is deze spiegel gelijk aan het getal *(E:2)*.

Zodoende zien we dat x_1 (met $x_1=E-2$) het spiegelbeeld is van het getal *2*, en dat x_2 (met $x_2=E-3$) het spiegelbeeld is van het getal *3*. Immers, we weten dat de respectievelijke sommen van p_i en x_i telkens gelijk moeten zijn aan *E*.

We duiden nu, op onze voorstelling van het getal *8*, deze spiegelbeelden aan met de letter "*Q*", als volgt:

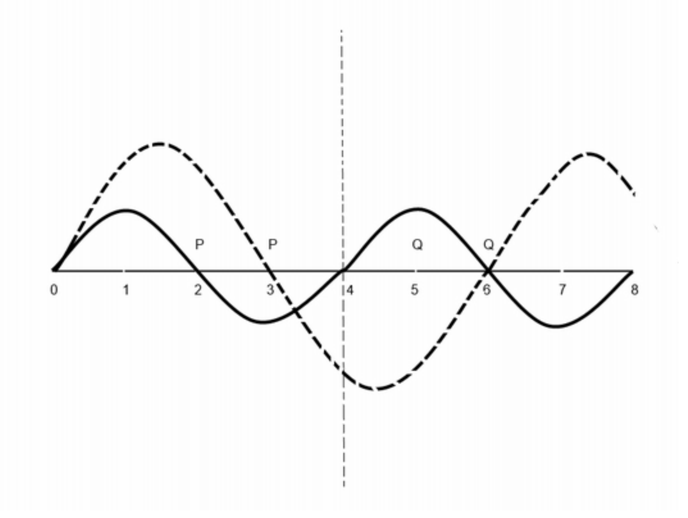


Wat Goldbach nu zegt, is het volgende: "tenminste één van de aldus bekomen *Q*'s, is opnieuw een priemgetal (en dit geldt voor elk even getal groter dan *2*)".

We doen nu alsof we niet weten welke getallen q_i , met $4 \le q_i < 8$, priemgetallen zijn.

Nu beschouwen we opnieuw onze voorstelling van het getal *8*, en we duiden daarop ook aan: alle getallen tussen *0* en *8* welke nooit priem kunnen zijn; dat zijn welbepaald de samengestelde getallen, meer bepaald: het zijn de veelvouden van de priemgetallen uit de eerste helft, en dus de veelvouden van de priemgetallen p_i , met $0<p\leq_i 4$ die we al hadden aangeduid. We merken nu reeds op dat er slechts twee soorten van getallen bestaan: de priemgetallen en de samengestelde getallen. De laatstgenoemden zijn veelvouden van de priemgetallen.

We vinden deze veelvouden door, telkens vertrekkende vanuit het getal *0*, 'golven' te tekenen die de genoemde priemgetallen elk snijden, als volgt:



NB: nogmaals, deze 'golven' stellen hier geen fysische golven voor, het zijn enkel didactische hulpmiddelen in functie van onze voorstelling van getallen als samenstellingen én van termen én van factoren.

De golven die, vertrekkende vanuit *0*, doorheen een welbepaalde *P* gaan, werpen als het ware alle veelvouden als in een zweepslag voor zich uit, meer bepaald telkens waar de golven de horizontale snijden.

We bekomen hier aldus twee golven, namelijk: (1°) de golf van het priemgetal *2* (de volle lijn), die de veelvouden van *2* aanduidt telkens waar ze de horizontale snijdt en, (2°), die van het priemgetal *3* (in streepjeslijn), die de veelvouden van *3* aanduidt telkens waar ze de horizontale snijdt.

We zien dus duidelijk:

(1°) dat het getal *4* niet priem kan zijn wegens de golf van *2*;

(2°) dat het getal *6* niet priem kan zijn wegens de golf van *2*;

(3°) dat het getal *6* niet priem kan zijn wegens de golf van *3*;

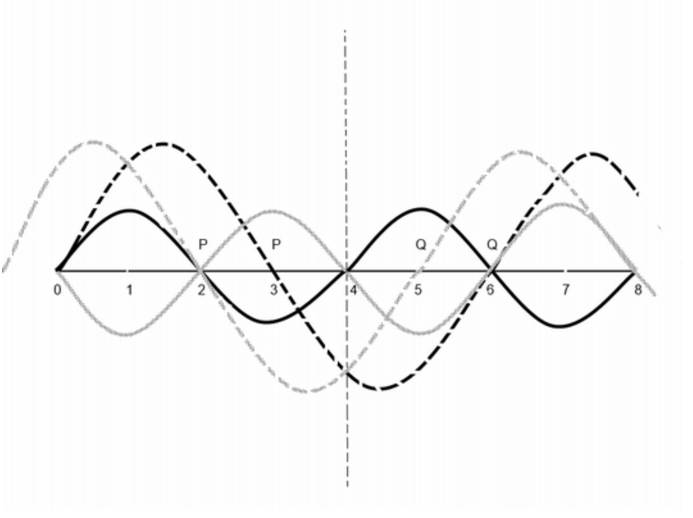
(4°) dat het getal *8* niet priem kan zijn wegens de golf van *2*;

We herhalen:

al die getallen in de rechter helft van onze voorstelling van het getal *8*, die door één van onze priemgolven uit de linker helft van onze voorstelling van het getal *8* doorkruist worden, kunnen niet priem zijn omdat het veelvouden van priemgetallen zijn. In ons voorbeeld zien we dat dit het geval is met de getallen *4, 6* en *8*, welke dus samengestelde getallen zijn.

We kunnen nu reeds opmerken dat alle andere getallen in onze rechter getalshelft, priemgetallen zullen zijn, aangezien er behalve de samengestelde getallen en de priemgetallen, geen derde soort van getallen bestaat.

Nu passen we de volgende voorstellingswijze toe: teneinde het 'spiegelingsproces' te integreren in onze 'golfmethode', laten we (in ons voorbeeld met betrekking tot het getal *8*) niet alleen de priemgetallen p_i met $0<p_i\leq 4$ spiegelen over *4*, maar tevens spiegelen we de zopas bekomen golven. Als we nu de gespiegelde golven in grijs tekenen, ziet onze voorstelling van het getal *8* er als volgt uit:



De golven die van Links naar Rechts lopen (hier in zwarte kleur voorgesteld) noemen we LRgolven. De golven die van Rechts naar Links lopen (hier in grijze kleur voorgesteld) noemen we RLgolven.

Zoals men kan zien, vertrekken de LRgolven vanuit *0*, en omdat hun spiegelbeelden de RLgolven zijn, vertrekken de RLgolven vanuit *E*, want *E* is het spiegelbeeld van *0*.

Nogmaals: de RLgolven onstaan door de spiegeling van de LRgolven over *(E:2)*. [In ons voorbeeld is *(E:2)=4*]. We merken nog op dat het getal *4* aldus zijn eigen spiegelbeeld vormt. We zien ook dat elk getal *E* dat een priemgetal als helft heeft, op zicht voldoet aan de eis van Goldbach. (Daarom ook zal zo'n getal $E=2p_i$ uitgesloten zijn als voorbeeld in de veronderstelling welke meteen volgt).

Welnu, hier volgt dan onze 'reductio ad absurdum' (en het is heel belangrijk het volgende goed te verstaan):

Indien Goldbach onwaar zou zijn, dan zou er tenminste één even getal *E* moeten bestaan in welker voorstelling alle spiegelbeelden van de priemgetallen p_i met $0<p_i\leq 4$, altijd niet-

priem zouden zijn, met andere woorden: dan zouden, met betrekking tot dat getal, al de spiegelbeelden van de priemgetallen p_i uit onze eerste getalshelft, gelegen zijn op LR-golven. Immers: de LRgolven snijden de horizontale in onze tweede getalshelft altijd op punten welke veelvouden zijn van de priemgetallen uit onze eerste getalshelft.

Maar: het is duidelijk dat zulks slechts het geval kan zijn indien voor dat even getal (en we herhalen: het onderstelde getal E dat, indien het zou bestaan, Goldbach onwaar zou maken) zou gelden dat de RLgolven zelf, de LRgolven zouden weerspiegelen (immers: de som van spiegelbeelden vormt telkens het betreffende even getal), met andere woorden:

indien de LRgolven allemaal zouden samenvallen met RLgolven.

Vooreerst nog een opmerking ter voorkoming van misverstanden: het doet er niet toe of 'golven' naar boven of naar beneden toe buigen, omdat het hier, nogmaals, niet gaat om fysische golven, doch om louter didactische voorstellingen; vandaar ook moeten de golven die aan de bovenzijde van de horizontale lopen beschouwd worden als identisch aan de golven die aan de onderzijde ervan lopen, van zodra zij op dezelfde punten (getallen) de horizontale kruisen.

Welnu, stel nu eens dat, met betrekking tot een bepaald even getal *E* groter dan *2*, alle LRgolven inderdaad zouden samenvallen met alle RLgolven, dan zou zulks betekenen dat dit getal (— en men beschouwe nu de voorstelling van ons voorbeeld met het getal *8*) alle priemfactoren zou moeten bevatten die hetzij kleiner zijn dan, hetzij gelijk zijn aan *4*.

In het algemeen: gesteld dat, met betrekking tot een bepaald even getal *E* groter dan *2*, alle LRgolven inderdaad zouden samenvallen met alle RLgolven, dan zou zulks betekenen dat dit getal *E* alle priemfactoren zou moeten bevatten die hetzij kleiner zijn dan, hetzij gelijk zijn aan *(E:2)*. Immers, al die LRgolven zullen, indien zij zich in RLgolven spiegelen, de horizontale snijden in *E*; met andere woorden: ze zullen ook 'aankomen' in *E*.

We zien nu dat, vanaf een waarde voor $E>8$, om aan deze voorwaarde te kunnen voldoen, E groter zou moeten zijn dan E (sic!), want reeds het product van alle priemgetallen p_i met $0<p_i\leq(E:2)$, is steeds groter dan E zelf, zoals middels Tschebycheff (zie p. 30) kan aangetoond worden.

NB: de gevallen met $E\leq8$ kunnen vanzelfsprekend apart worden behandeld.

Vandaar kan Goldbach niet onwaar zijn, wat te bewijzen was.

We herhalen dit alles hier nogmaals gevat:

Goldbach ware onwaar als er een even getal E bestond waarvoor zou gelden dat alle q_i (=spiegelingen van de priemgetallen p_i met

$0<p_i \leq (E:2)$) veelvouden waren (meer bepaald: veelvouden van p_i). In dat geval ware er immers geen enkele som van een p_i en een q_i, beide priem, te vinden. Nu zijn de getallen gelegen tussen $E:2$ en E zelf, ofwel priemgetallen, ofwel veelvouden daarvan, een derde mogelijkheid is er niet. We weten nu zeker dat alle veelvouden gelegen zijn op LRgolven, die namelijk de veelvouden van de priemgetallen als een zweepslag voor zich uit jagen tot in het oneindige. Vandaar kunnen we ook schrijven: Goldbach ware onwaar als er een even getal E bestond waarvoor zou gelden dat alle q_i (=spiegelingen van de priemgetallen p_i met $0<p_i \leq (E:2)$) gelegen waren op LRgolven (meer bepaald: ge-

lijk aan *E:2* of tussen *E:2* en *E*, dit wil zeggen: golven gelegen op het lijnstuk *[E:2,E]*), want dan zou geen van deze spiegelbeelden priem zijn, zodat geen som van twee priemgetallen ooit gelijk kon zijn aan *E*. Er zou nu geen probleem zijn indien de LRgolven, eenmaal *E:2* gepasseerd, zichzelf zouden spiegelen in die zin dat hun vormen zowel links als rechts van (*E:2*) dezelfde zouden zijn: in dat geval zouden we immers zeker weten dat alle q_i alle p_i zouden weerspiegelen over *E:2*, en dat die q_i allemaal veelvouden van priemgetallen zouden zijn, want dan zouden ze ter rechter zijde van *E:2* net zoals ter linker zijde van *E:2* op de LRgolven liggen. Het probleem is echter dat de vormen van de LRgolven links en rechts van *E:2* niet noodzakelijk (en zoals feitelijk zal bewezen worden ook nooit, maar dat weten we hier nog niet) elkaars spiegelbeelden zijn. Opdat echter alle p_i zich zouden spiegelen in q_i , moeten ze dat wel zijn. Nu zouden ze dat echter wél kunnen zijn in één welbepaald geval, namelijk in het geval waarin het beeld van de vormen van de LRgolven die tussen *0* en *E:2* liggen of ermee samenvallen (dit wil zeggen: de golven gelegen op het lijnstuk *[0,E:2]*), gespiegeld over *E:2*, zou samenvallen met het beeld van de vormen van de LRgolven zoals die eruit zien eenmaal ze samenvallen met *E:2* of *E:2* voorbijgegaan zijn (dit wil zeggen: de golven gelegen op het lijnstuk *[E:2,E]*). Wij moeten ons dus het bestaan van een even getal *E* trachten voor te stellen (op een afbeelding gelijkaardig aan de afbeelding in ons voorbeeld) waarbij de LR-golven perfecte overlappingen zijn van hun spiegelbeelden over *E:2*, dewelke wij RLgolven hebben genoemd. In die voorstelling zullen nu noodzakelijkerwijze alle RLgolven vertrekken vanuit *E*, want *E* is de weerspiegeling van *0*, waaruit alle LRgolven vertrekken. Als nu de LRgolven samenvallen met de RLgolven, betekent dat meteen dat alle LR-golven (die, zoals gezegd, vertrekken vanuit *0*) zullen aankomen in *E*. Wat wil zeggen dat, in dat geval, *E* alle priemfactoren p_i zal moeten bevatten. Opdat echter dit laatste het geval zou kunnen zijn, is *E* (vanaf een waarde $E>8$) altijd veel te klein: zoals gezegd is dit aantoonbaar middels Tschebycheff's stelling, welke zegt dat tussen elk getal en zijn tweevoud tenminste één priemgetal ligt (zie p.

32). Zodat de veronderstelling onder dewelke Goldbach onwaar zou zijn, zelf nooit waar kan zijn. Wat te bewijzen was.

Een aanvullende benadering

De lezer kan nu de opmerking maken dat het samenvallen van de LRgolven met de RLgolven nog onduidelijk is: hij kan beweren dat het bestaan van gemeenschappelijke elementen van de beide verzamelingen welke geconstitueerd worden door respectievelijk LR-golven en RLgolven, niet noodzakelijk impliceert dat deze verzamelingen ook zouden samenvallen. Teneinde deze twijfel uit de weg te ruimen, maken we nog een andere benadering, waarbij het onze opzet is, aan te tonen dat het samenvallen van de beide groepen golven (namelijk LRgolven en RLgolven) noodzakelijk uit de gegevenheden volgt.

In de huidige paragraaf volgt een intuïtieve benadering. In de volgende paragraaf (§3) hervatten we deze benadering, uitgebreider en gedocumenteerd met enkele didactische voorstellingen.

Ziehier eerst onze intuïtieve benadering:

Stel dat Goldbach onwaar is voor een bepaald even getal E.

Dan liggen de spiegelbeelden (lees telkens: "spiegelbeelden over $E:2$ ") van alle priemgetallen uit de linker getalhelft altijd op LR-golven (want, in de onderstelling dat Goldbach onwaar is, zijn deze spiegelbeelden altijd veelvouden van priemgetallen).

En dan liggen de spiegelbeelden van alle priemgetallen uit de rechter getalhelft ook altijd op LRgolven (want, in de onderstelling dat Goldbach onwaar is, zijn ze eveneens altijd veelvouden van priemgetallen).

Dat betekent dat dan de spiegelbeelden van alle priemgetallen op LRgolven liggen.

Anders gezegd: dan zullen de spiegelbeelden van de veelvouden van de priemgetallen, alle priemgetallen bevatten.

Nog anders gezegd: dan liggen alle priemgetallen op de spiegelbeelden van veelvouden van priemgetallen.

Welnu:

(1°) de "veelvouden van priemgetallen" zijn de LRgolven;

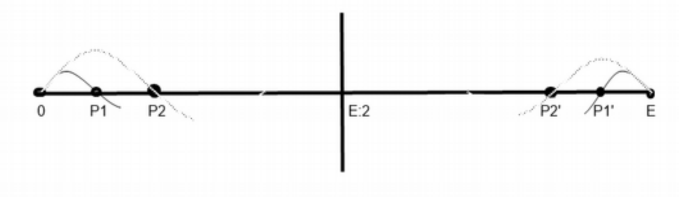
(2°) de "spiegelbeelden van veelvouden van priemgetallen" zijn de RLgolven.

Uit (1°) en (2°) volgt nu dat LRgolven en RLgolven dan noodzakelijk samenvallen. Immers: de orde in de getallenrijen wordt weliswaar omgekeerd doch verder bewaard door de bewerking van de spiegeling.

En in dat geval kan *E* niet bestaan, zoals middels Tschebycheff (zie p. 30) aantoonbaar is.

§3. Een didactische benadering

Beschouw een strookje wit papier met daarop een lijnstuk, met op de helft ervan *E:2*, uiterst links het punt *0*, en uiterst rechts het even getal *E*.



De tweede stip van links stelt het eerste priemgetal (*P1*) voor.

Vanuit het nulpunt vertrekt doorheen *P1* een zwarte golf die verder alle veelvouden van *P1* zal vormen, telkens door de horizontale te snijden.

De derde stip van links stelt het tweede priemgetal (*P2*) voor.

Vanuit het nulpunt vertrekt doorheen *P2* een tweede zwarte golf (in stippellijn) die verder alle veelvouden van *P2* zal vormen, telkens door de horizontale te snijden.

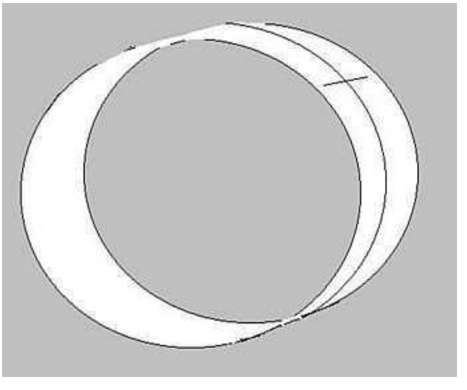
De tweede stip van rechts stelt het spiegelbeeld over *E:2* van het eerste priemgetal (*P1*) voor: het is *P1'*.

Vanuit *E* vertrekt doorheen *P1’* een blauwe golf die verder de horizontale zal snijden op afstanden van *E* die veelvouden zijn van het lijnstukje *(E-P1’)*.

De derde stip van rechts stelt het spiegelbeeld over *E:2* van het tweede priemgetal (*P2*) voor: het is *P2'*.

Vanuit *E* vertrekt doorheen *P2'* een blauwe golf die verder de horizontale zal snijden op afstanden van *E* die veelvouden zijn van het lijnstukje *(E-P2').*

We nemen nu ons strookje papier, dat elastisch is, aan de uiteinden vast, en we rekken het uit… om het vervolgens om te plooien tot een band.

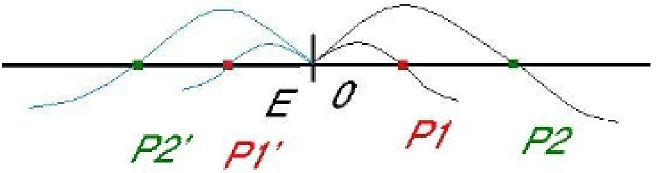


We kleven de uiteinden waarop respectievelijk het nulpunt en het punt *E* staan, aan elkaar.

We letten er op dat onze tekening aan de buitenkant, bovenaan de band zichtbaar is, aan het nulpunt.

E:2 bevindt zich dus ergens aan de ‘zuidpool’ van de band.

We kijken nu van boven op de band neer en we hebben het volgende beeld:



Zo beschouwd, lijkt het er op dat de punten en de golven spiegelen over het punt *0*, dat quasi samenvalt met het punt *E*.

In feite spiegelen deze elementen over het punt *E:2* dat buiten ons gezichtsveld ligt, maar men ziet duidelijk in dat dit op hetzelfde neerkomt.

De priemgetallen (*P1, P2,* …) staan nu rechts afgebeeld, en we lezen ze van links naar rechts, net zoals de LRgolven die ze vormen;

hun spiegelbeelden (*P1', P2',* …) staan nu links afgebeeld, en we lezen ze van rechts naar links, net zoals de RLgolven die ze vormen.

We veronderstellen nu dat Goldbach onwaar is, met andere woorden: dat we een getal *E* gevonden hebben dat het vermoeden van Goldbach tegenspreekt.

Het spiegelbeeld van *P1* is *P1'*.

P1' zal krachtens onze onderstelling een samengesteld getal zijn, en ligt daarom op de LRgolven.

Maar omdat *P1'* het spiegelbeeld is van *P1*, ligt het ook op de RLgolven, welke de zwarte LRgolven weerspiegelen.

Het spiegelbeeld van *P2* is *P2'*.

P2' zal krachtens onze onderstelling een veelvoud (een samengesteld getal) zijn, en ligt daarom op de zwarte golven, de LRgolven.

Maar omdat *P2'* het spiegelbeeld is van *P2*, ligt het ook op de blauwe golven, de RLgolven, welke de zwarte LRgolven weerspiegelen.

Wanneer we nu de priemgetallen de ene na de andere zouden noemen terwijl we de LR-golven volgen, dan zouden we verkrijgen: (*P1, P2, ..., ..., P2', P1'*). We moeten dus gewoon de band volgen in de richting LR, naar beneden toe, en dan helemaal rond weer naar boven toe.

Wanneer we nu de priemgetallen de ene na de andere zouden noemen terwijl we de RL-golven volgen, dan zouden we verkrijgen: (*P1', P2', ..., ..., P2, P1*). We volgen hier de band in de richting RL, naar beneden toe, en dan helemaal rond weer naar boven toe.

We merken op dat niet alleen de getallen, maar ook de volgorde van de getallen gespiegeld wordt.

Laten we nu de spiegelbeelden, namelijk *P1'* en *P2',* een tweede keer spiegelen over *E:2*.

We zien nu dat de verkregen *P1"* samenvalt met *P1* en dat de verkregen *P2"* samenvalt met *P2*.

Dat is nu het geval voor alle aldus verkregen *P"*, omdat de volgorde van de dubbel gespiegelde getallen behouden is gebleven.

Tevens krijgen alle getallen *P"* (welke samenvallen met de getallen *P*) een supplementaire eigenschap van de getallen *P'* mee:

Zoals we zagen, liggen de getallen *P'* zowel op de LRgolven als op de RLgolven. Welnu, omdat gegeven is dat de RLgolven en de LR-golven elkaar weerspiegelen, geldt dat ook voor de getallen die erop liggen, in casu alle getallen *P'*, welke spiegelen in de getallen

P”: de getallen *P”* liggen zowel op LRgolven als op RLgolven.

We weten nu dat de dubbele spiegeling de getallen behoudt alsook hun volgorde.

We weten ook dat de golven door niets anders geconstitueerd worden dan door de betreffende getallen.

Vandaar vallen de LRgolven en de RLgolven noodzakelijk samen.

Nu knippen we onze band weer doormidden op hun punt waar we hem hebben aan elkaar gelijmd, namelijk in de punten *0* of *E*.

Wat we te zien krijgen, is een tekening waarop de zwarte en de blauwe golven elkaar perfect overlappen. De band blijkt wel oneindig groot geworden, *E:2* blijkt oneindig ver te liggen; we kunnen er niet bij, maar dat is geen bezwaar.

Als nu alle zwarte en blauwe golven samenvallen, komen ook de zwarte (LRgolven) aan in *E*. En dat betekent dat *E* alle priemfactoren moet bevatten.

Zo'n *E* kan niet bestaan (ze moet oneindig groot zijn), zoals middels Tschebycheff bewijsbaar is (zie p. 30). Dus kan Goldbach niet onwaar zijn. Wat te bewijzen was.

Een mogelijke tegenwerping formeel weerlegd (aanzet tot een formeel bewijs van Goldbachs vermoeden).

Als Goldbach onwaar is, zal gelden dat elk spiegelbeeld over *E:2* van elk priemgetal kleiner dan E, een samengesteld getal is, met andere woorden geldt dan: $E\text{-}p_i=mp_j$ (met m een natuurlijk getal, $m>1$, en p_i , p_j priemgetallen).

Indien p_i gelijk is aan p_j dan is er geen probleem, want dan is het duidelijk dat de RL-golven en de LRgolven samenvallen.

Formeel: als $p_i=p_j$ dan volgt uit $E\text{-}p_i=mp_j$ dat $E=mp_i+p_i =(m+1)p_i$, wat betekent dat dan p_i een factor is van E.

Het probleem ontstaat bij de opwerping dat p_i niet noodzakelijk gelijk is aan p_j .

We zullen nu aantonen dat p_i niet kan verschillen van p_j.

Vooreerst geven we een hulpstelling, welke luidt: "Als $E\text{-}p_i=mp_j$ met p_i verschillend van p_j , dan mag E geen p_j-voud zijn, dus dan mag niet gelden dat $E=bp_j$. ($b>1$; b een natuurlijk getal)".

Het bewijs van onze hulpstelling gaat via een eenvoudige reductio ad absurdum, als volgt: stel dat $E=p_jb$, dan volgt uit $E\text{-}p_i=mp_j$ dat geldt: $p_jb\text{-}p_i=mp_j$, waaruit: $p_jb\text{-}mp_j=p_i$, waaruit: $p_j(b\text{-}m)=p_i$, en als we stellen dat $b\text{-}m=c$ (met c een natuurlijk getal) dan volgt: $p_jc=p_i$. In dat geval zou het ene priemgetal een veelvoud moeten zijn van het andere, wat niet kan. Dit was te bewijzen.

NB. Als $(b\text{-}m)=1$, dan volgt dat $p_i=p_j$; dus moet gelden dat $(b\text{-}m)\neq 1$. Als nu $(b\text{-}m) \neq 1$, dan zou p_i een veelvoud moeten zijn van p_j , wat onmogelijk is omdat priemgetallen geen veelvouden kunnen zijn.

Merk op dat onze hulpstelling geldt voor elk priemgetal kleiner dan *E*. We bewijzen verderop onder "(*)" dat deze hulpstelling geldt voor elk priemgetal kleiner dan *E*.

[Dat betekent concreet dat geldt:

als $E\text{-}p_i=m3$ dan mag *E* geen *3*-voud zijn, dus dan mag niet gelden dat $E=b3$;

als $E\text{-}p_i=m5$ dan mag *E* geen *5*-voud zijn, dus dan mag niet gelden dat $E=b5$;

als $E\text{-}p_i=m7$ dan mag E geen 7-voud zijn, dus dan mag niet gelden dat $E=b7$;

enzovoort voor alle priemgetallen kleiner dan E.]

We herinneren eraan: Goldbach is onwaar als voor een even getal E geldt dat alle spiegelbeelden van de priemgetallen kleiner dan E veelvouden zijn, dus als we voor elke p_i vinden dat $E\text{-}p_i=mp_j$ met $m>1$. Nu hebben we in onze hulpstelling gevonden dat, indien p_i verschilt van p_j , E geen p_j-voud mag zijn. Concreet betekent dit dat E de factor p_j nooit kan bevatten (vanzelfsprekend: tenzij $p_j=p_i$) . En dat geldt nu voor alle priemgetallen kleiner dan E. Dus zal E geen enkele van de priemfactoren kleiner dan E kunnen bevatten. Dus: indien $E\text{-}p_i=mp_j$ met p_i verschillend van p_j , dan kan E nooit groter zijn dan *2*, en dan vervalt onze onderstelling waarbij Goldbach onwaar geacht wordt te zijn.

Rest nu het alternatief, namelijk dat $p_i=p_j$. En in dat geval vallen LRgolven en RLgolven samen.

(*) Nu kan er nog onduidelijkheid zijn over de kwestie waarom onze hulpstelling geldt voor elk priemgetal kleiner dan E. Hier volgt nu het bewijs van de stelling dat onze hulpstelling geldt voor elk priemgetal kleiner dan E:

Stel $E\text{-}p_i=mp_j$.

Als $p_i = p_j$ dan $E = (m+1)p_i$ en dan ligt E op de golf van p_i.

Als $p_i \neq p_j$ dan $E \neq p_j b$ en dan ligt E niet op de golf van p_j.

Stel $E - p_j = np_k$ (met p_k een priemgetal en n een natuurlijk getal, $n > 1$).

Als $p_j = p_k$ dan $E - p_j = np_j$ waaruit $E = (n+1)p_j$ en dan ligt E op de golf van p_j.

Als $p_j \neq p_k$ dan $E \neq np_k$ (met n een natuurlijk getal, $n > 1$) en dan ligt E niet op de golf van p_k.

Stel nu $p_i \neq p_j$ en $p_j = p_\mathrm{k}$ dan volgt een contradictie (zie het onderstreepte hoger).

Dus: ofwel $p_i \neq p_j$ en $p_j \neq p_k$ en dan ligt E alleen op een p_i-golf, (**)

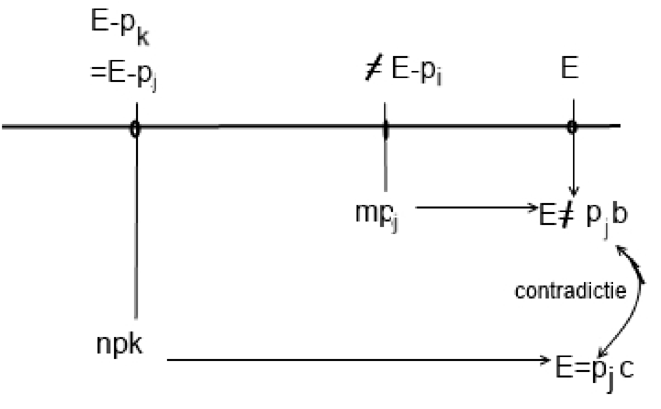
ofwel $p_i = p_j$ en $p_j = p_k$ en dan ligt E op alle priemgolven. (***)

Conclusie: omdat "(**)" uitgesloten is, geldt altijd "(***)", wat betekent dat alle priem-golven aankomen in E en dat altijd geldt dat in $E\text{-}p_i = mp_j$ geldt dat $p_i = p_j$.

Van het hier boven staande volgt verderop een tekening ter verduidelijking. Brengen we hier eerst dit laatste nogmaals duidelijk onder woorden:

Het beeld van priemgetal p_i (en dat beeld is gelijk aan $E\text{-}p_i$) is gelijk aan een veelvoud van een priemgetal p_j, of dus gelijk aan mp_j.

Op zijn beurt is dan het beeld van priemgetal p_j (en dat beeld is gelijk aan E-p_j) gelijk aan een veelvoud van een priemgetal p_k, of dus gelijk aan np_k. En zo voort voor alle priemgetallen kleiner dan E. Als nu p_i en p_j verschillende priemgetallen zijn, dan geldt, wegens onze hulpstelling, dat p_j geen factor kan zijn van E. Maar dan moeten noodzakelijk ook p_j en p_k en alle andere priemgetallen onderling verschillen, want als reeds p_i en p_j verschillen, terwijl bijvoorbeeld p_j en p_k aan elkaar gelijk zouden zijn, dan zou daaruit een contradictie volgen. Immers, als p_i en p_j verschillen, impliceert zulks dat p_j geen factor van E kan zijn, terwijl, als p_j en p_k aan elkaar gelijk zijn, daaruit volgt dat p_j wel een factor van E moet zijn. Deze contradictie maakt het dus onmogelijk dat de spiegelbeelden van sommige priemgetallen geen veelvouden van deze priemgetallen zouden zijn terwijl de spiegelbeelden van andere priemgetallen wel veelvouden van deze priemgetallen zouden zijn. Vandaar: ofwel zijn de spiegelbeelden van de priemgetallen allemaal hun eigen veelvoud, ofwel is geen ervan zijn eigen veelvoud. De laatste mogelijkheid is uitgesloten omdat dan E geen enkele van die priemfactoren zal bevatten, en E dan gelijk zal zijn aan een getal kleiner dan of gelijk aan 2. Rest dus de eerste mogelijkheid: de spiegelbeelden van alle priemgetallen zijn noodzakelijk veelvouden van zichzelf. Tot hier deze verduidelijking.


E-p k
=E-p j
≠ E-p i
E
mp j
E≠ p j b
contradictie
npk
E=p j c