

Waarom had Spinoza een voorkeur voor meetkunde (en niet voor rekenkunde)?

Adrie Hoogendoorn

1. Het Probleem

Een van de opvallende kenmerken van Spinoza's filosofie is zijn voorkeur voor de meetkunde en zijn geringe achting voor de rekenkunde. De meetkunde wordt zelfs in de ondertitel van zijn *Ethica* genoemd, want de *Ethica* wordt 'volgens de meetkundige ordening' (Lat. *ordine geometrico*) uiteengezet. De rekenkunde wordt in zijn werk nauwelijks genoemd. En als ze genoemd wordt lijkt het om eerste kensoort, empirische kennis, te gaan. Een van de argumenten is uiteraard dat hij zijn filosofie wilde formuleren in een zo sterk mogelijk deductief systeem. En dan is de meetkunde van Euclides daarvoor het ultieme sjabloon. Maar waarom dat *dédain* voor de rekenkunde? Voor hedendaagse filosofen, en wiskundigen, is dat des te opvallender. Immers, de meetkunde en de rekenkunde worden beide als gelijkwaardige takken van de wiskunde gezien. Sterker nog, volgens het *logicistische programma* van Frege (1848-1925), en in navolging van hem, van Bertrand Russell (1872-1970) en Rudolf Carnap (1891-1970) is juist de *rekenkunde* – en niet de *meetkunde* – terug te brengen tot de logica. Wellicht was het onuitgesproken argument dat de meetkunde al evident logica was terwijl dat voor de rekenkunde nog bewezen diende te worden. En weliswaar stuitte Russell op de logische paradoxen, en gaf hij toe dat het axioma van oneindigheid niet alleen op logische gronden gekend wordt. Maar toch, de rekenkunde als logisch en rationeel, programma doet in de nieuwere filosofie niet onder voor de meetkunde die door Spinoza (en velen voor hem) zo op het schild geheven wordt.

Mijn stelling is dat Spinoza's voorkeur voor de meetkunde ingegeven is door de ontdekking van de irrationale getallen. Dit zijn getallen die niet als geheel getal of als breuk geschreven kunnen worden. Ze gaven sedert hun ontdekking in de Oudheid een klap aan het prestige van de rekenkunde, terwijl er in de meetkunde wel degelijk een zichtbare grootte, een lijnstuk, aan toegeschreven kan worden. Spinoza staat in zijn voorkeur niet alleen. De Wetenschappelijke Revolutie van de 17e eeuw was een meetkundige revolutie. Sterker nog, de meetkunde als theorie van de wereld voorzag Newton en Einstein van hun 'intellectual toolbox'. Dat is althans de mening van wetenschapsfilosoof Popper

2. De Rekenkunde

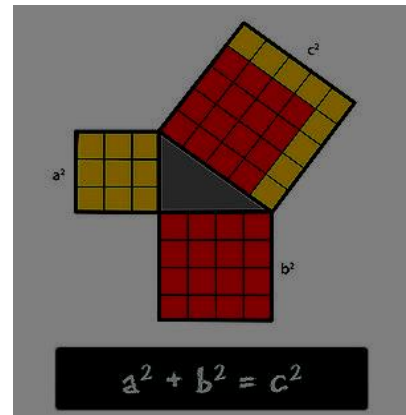
Volgens *Pythagoras* (6e eeuw v.C.) – de ontdekker van de Stelling van Pythagoras – is elk meten het optellen van natuurlijke eenheden. Voorbeeld: in de muziek passen willekeurige muzikale tonen slecht bij elkaar, ze dissoneren. Maar soms lijkt het of die afzonderlijke tonen met elkaar versmelten, ze consoneren. Pythagoras ontdekte dat je deze samenklanken systematisch te voorschijn kunt roepen door eerst de snaar over de gehele lengte aan te slaan, daarna over de halve lengte (1:2), als 2:3 en als 3:4. Zo produceer je de octaaf, de kwint en de kwart. Consonante intervallen komen dus overeen met de *verhoudingen* van eenvoudige gehele getallen. Deze ontdekking gaf Pythagoras de overtuiging dat de gehele wereld te herleiden was tot verhoudingen – de *ratio's* – van gehele getallen. De kosmos was ingericht volgens de consonante verhoudingen van de muziek, de harmonie der sferen. Zelfs in de 17e eeuw meende de astronoom Kepler dat de kosmos in wezen een harmonieus

geheel was en zocht hij naar de *harmonie der sferen*. Het wezen van de kosmos was voor Pythagoras een reeks meetbare gehele getallen (1, 2, 3, etc.) en de verhoudingen tussen die getallen, de breuken ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, etc.). Dit noemt men de *rationale* getallen: ze kunnen geschreven worden als geheel getal of als breuk. Ze zijn aftelbaar.

3. De Irrationale getallen

De ontdekking van de *irrationale* getallen ligt in het verlengde van de stelling van Pythagoras. Deze stelling houdt in dat bij een rechthoekige driehoek de som van het kwadraat van de zijden van de rechte hoek gelijk is aan het kwadraat van de schuine zijde. In formule: $a^2 + b^2 = c^2$. Voorbeeld: als de ene zijde van de rechte hoek 3 is, en de andere 4 dan is de schuine lijn 5. Want $3^2 + 4^2 = 5^2$, en de vierkantswortel uit 5^2 , d.w.z. $\sqrt{5^2}$, is 5 (zie afbeelding).

Maar nu komt het probleem: wat als de beide zijden elk 1 zijn? Wat is dan de lengte van de schuine lijn? De formule wordt dan: $1^2 + 1^2 = x^2$. Dus $1^2 + 1^2 = 2 = x^2$. Dit betekent dat x de vierkantswortel uit 2 is, $\sqrt{2}$. Maar $\sqrt{2}$ kan niet als een geheel getal of als breuk van gehele getallen geschreven worden. Het is een z.g. *Irrationaal* getal, d.w.z. niet aftelbaar en niet meetbaar. Je kunt het wel meetkundig construeren – zie de schuine zijde van de rechthoekige driehoek – maar niet beschrijven met natuurlijke getallen. Je kunt ze er hooguit mee benaderen. Omdat ze wel waren te construeren kon je er mee optellen en aftrekken als met lijnstukken. En vermenigvuldigen en delen door gebruik te maken van oppervlaktes. Zo werd de hele Griekse getaltheorie een *meetkundig* verhaal. Dit wordt uitgewerkt in de meetkunde van Euclides.



Stelling van Pythagoras, in dit geval
 $3^2 + 4^2 = 5^2$

De ontdekking van irrationale getallen was een klap voor de rekenkunde en de invloedrijke school van het pythagorisme. Volgens de mythe pleegde de ontdekker zelfmoord of werd hij daartoe gedwongen. Want het bestaan van irrationale getallen kon niet ontkend worden. Je hoefde je maar een rechthoekige driehoek voor te stellen met twee gelijke zijden en je zag de schuine zijde voor je: een eindige zijde ter grootte van een irrationaal, niet exact berekenbaar, getal. Gevolg: de meetkunde kreeg in de Oudheid al het primaat boven de rekenkunde. De gevolgen voor filosofie en wetenschap waren groot. In de Oudheid werd de zichtbare wereld in het algemeen al verklaard uit een er aan ten grondslag liggende onzichtbare wereld. Homerus verklaarde de zichtbare wereld uit de onzichtbare wereld van de Olympus, Democritus uit de onzichtbare atomen die conform de rationale getallen op een bepaalde standaard-afstand van elkaar af lagen. Er was een norm-afstand, namelijk de afstand tussen twee naast elkaar liggende atomen. Deze afstand kon gebruikt worden om alle afstanden tussen alle atomen onder elkaar te bepalen. Bij Plato (in de *Timaeus*) wordt de breuk met de rekenkunde manifest: de onzichtbare wereld bestaat uit onzichtbare elementaire deeltjes. Niet uit atomen, maar uit kristalvormige structuren bestaande uit veelhoeken die uiteindelijk terug te voeren zijn tot rechthoekige driehoeken, inclusief de driehoeken met irrationale getallen als schuine zijden, dus met $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$. Dit zijn de platoonse Vormen of Ideeën. Kortom Plato incorporeert de irrationale getallen meetkundig in zijn Ideeënleer en propageert het meetkundige model van de wereld. Aristoteles, leerling van Plato, zegt kortweg dat de rekenkunde over de even en oneven getallen gaat, en de

meetkunde over datgene wat niet geteld kan worden (An.Post.76b9). Met andere woorden, de meetkunde kon iets wat de rekenkunde niet lukte.

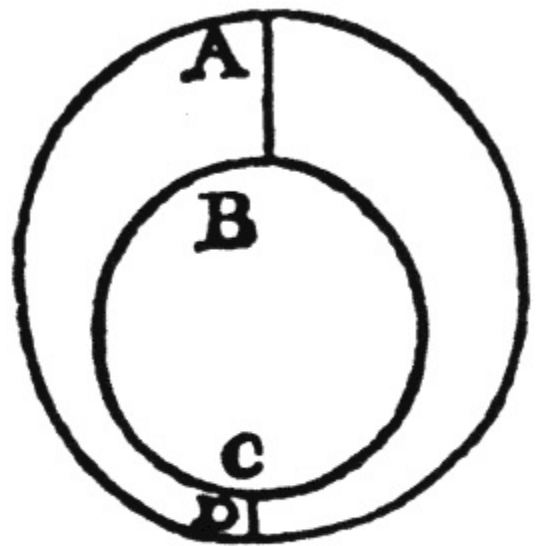
Het corpus van de meetkunde werd bovendien gesystematiseerd door Euclides. Zijn meetkunde is het meest invloedrijke deductieve systeem ooit. Volgens Popper was de meetkunde van Euclides niet zo zeer een exercitie in de zuiver meetkunde, als wel een theorie van de wereld in het kielzog van de platoonse kosmologie. Spinoza volgde hem er in na met een eigen deductief systeem van kosmos en mens.

4. Spinoza over de Rekenkunde

Hoe oordeelt Spinoza over de rekenkunde? Hij zegt er weinig over en meestal indirect, en wekt dan de indruk dat de rekenkunde eerste kensoort, empirische kennis is. Het meest duidelijk is hij in Brief 12 aan Lodewijk Meijer. In alinea 6 en 8 zegt hij:

[al.6] Welnu dat wij duur en kwantiteit naar believen kunnen bepalen, namelijk wanneer wij kwantiteit opvatten los van de substantie en wanneer wij duur scheiden van de wijze waarop hij uit de eeuwige dingen voortvloeit, ontstaan de begrippen tijd en maat, en wel tijd om duur, maat om kwantiteit zo te bepalen dat wij ze ons, voor zover het gaat, gemakkelijk kunnen verbeelden. ... Hieruit kan men duidelijk zien dat maat, tijd en getal niets anders zijn dan wijzen van denken of liever van zich verbeelden. ... [al.8] dat getal, noch maat, noch tijd – immers niet meer dan hulpmiddelen van de verbeelding – ...

Met andere woorden, tijd, maat en getal hebben geen relatie met de substantie en de 'eeuwige dingen'. Ze hebben *geen* ontologische status. Spinoza definieert 'duur' niet voor niets als 'onbepaalde voortzetting van het bestaan (Lat. *existendi*, en niet *essendi* in E2d5). Ze zijn 'niets anders' dan verbeeldingskennis, de empirische eerste kensoort. Rekenkunde is dan hooguit een empirische generalisatie van de werkelijkheid. Spinoza gaat in alinea 8 nog een stap verder en toont aan 'hoezeer getallen tekort schieten om alles te bepalen'. Hij geeft het voorbeeld van de, niet-concentrische, cirkel in de cirkel (zie Spinoza's illustratie). Hij zegt dat 'alle ongelijkheden van de ruimte [=het oppervlak] tussen de twee cirkels A en B' zodanig zijn dat ze 'getal te boven' gaan. En dat ligt niet aan 'de ontzaglijke grootte van de tussenliggende ruimte [=oppervlak]', want die is eindig. De grootste afstand tussen cirkel A en cirkel B is de lijn AB, de kleinste afstand is de lijn CD. Tussen deze twee afstanden zijn een oneindig aantal afstanden mogelijk die rekenkundig niet te beschrijven is. Dat kon pas met de later ontdekte differentiaal- en integraalrekening door Leibniz en Newton. Maar dan zijn we al in de 18e eeuw beland.



Brief 12: de cirkel in de cirkel

Toch zijn ook hier niet alle monnikskapen grauw, want Spinoza maakt een belangrijk voorbehoud. Zodra het om *verhoudingen* van getallen gaat – de ratio – gaat het in de rekenkunde wel degelijk om de ware rede-kennis, tweede kensoort. Het gaat dan specifiek over rationale getallen (gehele getallen en breuken), getallen die relaties weergeven. Spinoza

zelf geeft als voorbeeld de regel van vier in zijn uitleg van de drie kensoorten in E2p40s2. Het gaat dan om het vinden van het vierde getal als de verhouding – de ratio – tussen 2 paren getallen gelijk is. Voorbeeld: $2 : 3 = 5 : y$. Wat is y ? Antwoord: $y = 5 \times 3 / 2 = 15 / 2 = 7\frac{1}{2}$. Volgens de eerste kensoort (verbeelding) heb je een rekentruc op school geleerd en pas je die toe. Volgens de tweede kensoort (rede) kom je er door verstandelijk redeneren achter. Het is dus wel degelijk een rede-kwestie. En volgens de derde kensoort (intuïtie) heb je een direct inzicht in het juiste getal. Het voorbeeld is tevens een fraaie illustratie van hoe onwetenden toch rationeel kunnen handelen, namelijk als zij de adviezen die door wetenden volgens de rede geformuleerd zijn opvolgen. In een staat met min of meer rationele wetten handelen zowel wetenden als onwetenden rationeel als zij die wetten naleven.

5. Spinoza en het prestige van de meetkunde

De meetkunde maakt dus iets zichtbaar wat de rekenkunde niet kan. Het gevolg was dat de meetkunde leidraad werd in de natuurwetenschap. *Regiomontanus*, de belangrijkste wiskundige van de 15e eeuw, zegt in 1464 dat 'de stellingen van Euclides vandaag de dag nog net zo zeker zijn als duizend jaar geleden'. *Kepler* zegt in 1602 'daar waar materie is, daar is meetkunde' (*ubi materia, ibi Geometria*). En *Galilei* stelt dat de wiskunde (i.c. de meetkunde) de taal is waarin het boek der natuur is geschreven.

Spinoza sluit zich daarbij aan. De ondertitel van zijn hoofdwerk, de *Ethica*, luidt "volgens de meetkundige ordening uiteengezet". In Brief 2, alinea 2 geeft hij een summier motivatie voor die keuze, want deze is niet vanzelfsprekend voor een werk van filosofie:

Om nu de juistheid van deze stellingen helder en kort aan te tonen heb ik niets beter kunnen bedenken dan ze, op meetkundige wijze bewezen, aan uw kritisch onderzoek te onderwerpen.

Verdere motivatie vindt hij blijkbaar niet nodig, wellicht omdat het gezag van de meetkunde buiten kijf staat. In de Appendix van Deel 1 zegt hij dat 'de waarheid het menselijk geslacht voor eeuwig verborgen blijft, ware het niet dat de wiskunde (Lat. *Mathesis*), die ... over het wezen en de wezenseigenschappen van [meetkundige] figuren handelt, de mensen een andere maatstaf voor de waarheid toont'. Met 'een andere maatstaf' bedoelt hij – al zegt hij het cryptisch – een andere dan de maatstaf van de goddelijke openbaring. In Brief 76 verweert hij zich tegen Albert Burgh, een tot het katholicisme bekeerde regentzoon, die hem vraagt hoe hij weet dat zijn filosofie 'de beste is'. In zijn antwoord maakt Spinoza de vergelijking met de zekerheid die de meetkunde ons geeft:

Ik weet dat ik de ware wijsbegeerte begrijp. Als ge nu vraagt hoe ik dat weet, luidt mijn antwoord: evenals gij weet dat de drie hoeken van een driehoek gelijk zijn aan twee rechte ... want het ware is toetssteen van het ware en het onware.

Het voorbeeld komt uit de meetkunde en is voor Spinoza een standaardvoorbeeld om zijn zekerheid uit te drukken. Pas in de 18e eeuw, na Spinoza's dood, wordt de rekenkunde verder ontwikkeld tot de volwaardige discipline die zij nu is. Maar blijkbaar vonden Frege c.s. In de 19e en 20e eeuw het nog steeds noodzakelijk om de rekenkunde te funderen in de logica, met name in de verzamelingenleer.

6. Conclusies

Spinoza's voorkeur voor de meetkunde past in de traditie van het meetkundige programma

van de natuurwetenschappen. Maar dat hij een filosofisch werk op meetkundige wijze formuleert is zeker bijzonder. Hij heeft daarin nauwelijks navolging gehad. Volgens Descartes is de methode onbruikbaar voor de filosofie omdat deze, en vooral de metafysica, over uiteindelijke zaken gaat en daarmee raakt aan geestelijke en goddelijke zaken die geen uitgebreidheid bezitten.

Wellicht is Wittgenstein een navolger. Hij ordende zijn *Tractatus logico-philosophicus* weliswaar niet op meetkundige wijze, maar wel op rekenkundige wijze volgens de verzamelingenleer. Deze ordening heeft wel veel navolging gekregen. Weliswaar niet in de filosofie, maar wel in de wetenschappelijke wereld van scripties, nota's en proefschriften.

Noot

- Dit artikel is gebaseerd op Popper, Karl R, *Conjectures and Refutations* (1965), Ch. 2: The nature of philosophical problems and their roots in science, paragraaf VII-IX.
- Stan Verdult hielp bij het zoeken naar uitspraken van Spinoza over de rekenkunde, waarvoor mijn dank.
- Over de Wetenschappelijke Revolutie en de invloed van de meetkunde daarin handelt Hoofdstuk 1 van mijn boek over Spinoza's Briefwisseling. Brief 12 aan Meijer wordt behandeld in Hoofdstuk 4, paragraaf 12.